
منتدى توجيه الرياضيات
الرياضيات
الصف الأول
الأعدادى
مذكرة الهندسة
الترم الثانى
٢٠٢٠/٢٠١٩
تقديم
م/عادل ادوار

الوحدة الرابعة
الهندسة والقياس

البرهان الإستدلالى

فى ما سبق أستنتجنا عملياً بإستخدام الأدوات الهندسية فى القياس بعض الخواص والنتائج الهندسية و سوف نستخدم هذه الخواص والنتائج والنظريات فى الإستدلال على الحلول و البراهين للنظريات والتمارين نظرياً دون اللجوء إلى إستخدام الهندسية فى القياس

خطوات البرهان :

(١) تحديد المعلومات المتاحة بالمسألة " المعطيات "

(٢) تحديد المراد إيجاده أو إثبات صحته " المطلوب "

(٣) إستخدام المعطيات للوصول إلى المطلوب من خلال ترتيب خطوات لإيجاد أو إثبات صحة المطلوب " البرهان "

(٤) أحياناً تحتاج المسالة لبعض الإضافات فى الرسم لتساعد على البرهان "العمل"

(٥) يستخدم الرمزان (∵) بما أن ، (∴) أذن فى ترتيب خطوات البرهان

** تستخدم النظريات كقاعدة أو قانون فى إستنتاج المعلومات أو حل التمارين ويتم لإثبات صحتها بالبرهان ثم تستخدم فى حل التمارين دون الحاجة إلى إثبات صحتها عند إستخدامها فى حل المسائل المختلفة ومن هذه النظريات :

نظرية (١) : إذا تقاطع مستقيمان فإن كل زاويتين متقابلتين بالرأس تكونان متساويتين فى القياس

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ مستقيمان متقاطعان فى م

المطلوب : إثبات أن : ق (∠أ م ء) = ق (∠ب م حـ)

البرهان : ∵ ∠أ م ء ، ∠ ب م حـ متجاورتان

حيث : $\overrightarrow{\text{م حـ}} \cup \overrightarrow{\text{م ء}} = \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$

∴ ق (∠أ م ء) + ق (∠أ م حـ) = ١٨٠°

، ∵ ∠أ م حـ ، ∠ب م حـ متجاورتان

حيث : $\overrightarrow{\text{م أ}} \cup \overrightarrow{\text{م ب}} = \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

∴ ق (∠ م جـ) + ق (∠ ب م جـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ م ء) + ق (∠ م جـ) + ق (∠ م جـ) + ق (∠ ب م جـ) = ٣٦٠°

∴ ق (∠ م ء) = ق (∠ ب م جـ) وهو المطلوب

، بالمثل يمكن إثبات أن : ق (∠ م جـ) = ق (∠ ب م ء)

مثـــال١ : فى الشكل المقابل : ٢ء ∩ ب جـ = { هـ }

، ٢ هـ = ء هـ ، جـ هـ = ب هـ أثبت أن

Δ ٢ هـ جـ ≡ Δ ء هـ جـ

المعطيات : ٢ء ∩ ب جـ = { هـ } ، ٢ هـ = ء هـ ، جـ هـ = ب هـ

المطلوب : إثبات أن : Δ ٢ هـ جـ ≡ Δ ء هـ جـ

البرهان : ∵ ٢ء ∩ ب جـ = { هـ } ، ٢ هـ = ء هـ ، جـ هـ = ب هـ

∴ ق (∠ ٢ هـ جـ) = ق (∠ ء هـ ب) بالتقابل بالرأس

∴ ΔΔ ٢ هـ جـ ، ء هـ جـ فيهما :

٢ هـ = ء هـ

جـ هـ = ب هـ

ق (∠ ٢ هـ جـ) = ق (∠ ء هـ ب) " برهاناً "

∴ Δ٢ هـ جـ ≡ Δء هـ جـ وهو المطلوب

مثـــال٢ : فى الشكل المقابل أثبت أن : ق (∠ ء س هـ) = ٨٥°

ثم أوجد : ق(∠ ء س جـ) ، ق (∠ هـ س و)

الحـــــــــل

∵ ق(∠ س و جـ) = ق(∠ ص و ع) [للتقابل بالرأس]

∴ ق (∠ س و جـ) = ٥٣°

∵ ق (∠س جـ و) = ق (∠٢ جـ ب) [للتقابل بالرأس]

∴ ق (∠ س جـ و) = ٤٢°

∵ مجموع زوايا المثلث = ١٨٠°

∴ ق (∠ و س جـ) = ١٨٠° ـ [٥٣° + ٤٢°] = ١٨٠° ـ ٩٥° = ٨٥°

∵ ق (∠ ء س هـ) = ق (∠ و س جـ) [للتقابل بالرأس]

∴ ق (∠ء س هـ) = ٨٥°

∵ ق (∠ ء س هـ) + ق (∠ ء س جـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ ء س جـ) = ١٨٠° ــ ٨٥° = ٩٥°

∵ ق (∠ هـ س و) = ق (∠ ء س جـ) [للتقابل بالرأس]

∴ ق (∠ هـ س و) = ٩٥°

مثــ٣ــال : فى الشكل المقابل : ↔ا ب ∩ ↔حـ ء = { هـ }

، ↔س ص // ↔حـ ء ، س ∈ ا ب

، ق (∠ ص س ب) = ٤٠° أوجد ق (∠ ا هـ حـ)

المعطيات :

المطلوب :

البرهان : ∵ ↔س ص // ↔حـ ء " معطى " ، ↔ا ب قاطع لهما

∴ ق (∠ ء هـ ب) = ق (∠ ص س ب) = ٤٠° بالتناظر

، ∵ ↔ا ب ∩ ↔حـ ء = { هـ }

∴ ق (∠ ا هـ حـ) = ق (∠ ء هـ س) بالتقابل بالرأس

∴ ق (∠ ا هـ حـ) = ق (∠ ص س ب) = ٤٠° وهو المطلوب

نظرية (٢) : مجموع قياسات الزوايا المتجاورة المتجمعة حول نقطة يساوى ٣٦٠°

المعطيات : →و ا ، →و ب ، →و حـ ، →و ء أشعة نقطة البداية لكل منها " و "

المطلوب : إثبات أن : مجموع قياسا الزوايا المتجاورة المتجمعة حول و يساوى ٣٦٠°

العمــــل : نرسم ↔ء و

البرهان : ∵ ق (∠ هـ و ب) + ق (∠ ب و ا) + ق (∠ ا و ء) = ١٨٠°

، ق (∠ هـ و حـ) + ق (∠ حـ و ء) = ١٨٠°

∴ ق (∠ هـ و ب) + ق (∠ ب و ا) + ق (∠ ا و ء) + ق (∠ هـ و حـ) + ق (∠ حـ و ء) = ١٨٠° + ١٨٠° = ٣٦٠°

∴ ق (∠ ا و ب) + ق (∠ ب و حـ) + ق (∠ حـ و ء) + ق (∠ ء و ا) = ٣٦٠° وهو المطلوب

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل : ق (∠أ و ب) = ٥٠°، ق (∠حـ و ء) = ٦٥°
، ق (∠هـ و ء) = ٨٠° ، و حـ ينصف ∠ب و ء أوجد ق (∠أ و هـ)

المعطيات :

المطلوب : إيجاد ق (∠أ و هـ)

البرهان : ∵ و حـ ينصف ∠ب و ء (معطى)

∴ ق (∠ب و حـ) = ق (∠ ء و حـ) = ٦٥°

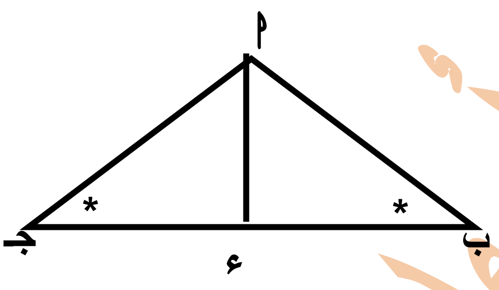
∵ ق (∠أ و ب) + ق (∠ب و حـ) + ق (∠حـ و ء) + ق (∠ء و هـ)
+ ق (∠أ و هـ) = ٣٦٠°

∴ ق (∠أ و هـ) = ٣٦٠ – [٥٠ + ٦٥ + ٦٥ + ٨٠]

∴ ق (∠أ و هـ) = ٣٦٠ ـ ٢٦٠ = ١٠٠°

مثـ٢ـال : فى الشكل المقابل أ ب جـ مثلث فيه ق (∠ب) = ق (∠جـ)
أء ينصف ∠ ب أ جـ أثبت أن أ ب = أ جـ

الحـــــــــل





ΔΔ أ ب ء ، أ جـ ء

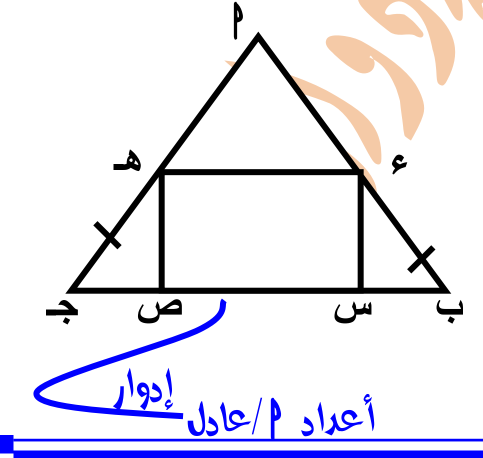
فيهما
ق (∠ ب) = ق (∠ جـ)
ق (∠ب أ ء) = ق (∠جـ أ ء)
أ ء ضلع مشترك

∴ Δ أ ب ء ≡ Δ أ جـ ء

ومن التطابق ينتج ان ∴ أب = أ جـ

مثـ٣ـال : فى الشكل المقابل : هـ جـ = ء ب ، ء س ص هـ مستطيل
أثبت ان ق (∠أ ء هـ) = ق (∠أ هـ ء)

الحـــــــــل



∵ ء س ص هـ مستطيل

∴ ق (∠ ء س ص) = ق (∠هـ ص جـ) = ٩٠°

∴ ق (∠ء س ب) = ق (∠هـ ص جـ) = ١٨٠° ــ ٩٠° = ٩٠°

ΔΔ ء ب س ، هـ جـ ص

فيهمـــا:
- ق (∠ء س ب) = ق (∠ هـ ص جـ) = ٩٠°
- ء س = هـ ص　[مستطيل]
- ء ب = هـ جـ

∴ Δ ء ب س ≡ Δ هـ جـ ص　∴ ق (∠ ب) = ق (∠جـ)　(١)

∵ الشكل المستطيل فيه ء هـ // س ص　∴ق (∠أ ء هـ) = ق (∠ ب) [تناظر]

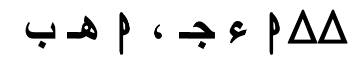
∴ق (∠ أ هـ ء) = ق (∠جـ) [تناظر]　(٢)

من ١ ، ٢ ينتج أن　ق (∠ أ ء هـ) = ق (∠ أ هـ ء)

مثـــال : فى الشكل المقابل أ ء = أ هـ ، ق (∠ أ ء جـ) = ق (∠ أ هـ ب)

أثبت أن (١) ب هـ = جـ ء　(٢) ب ء = جـ هـ

الحـــــــــــل



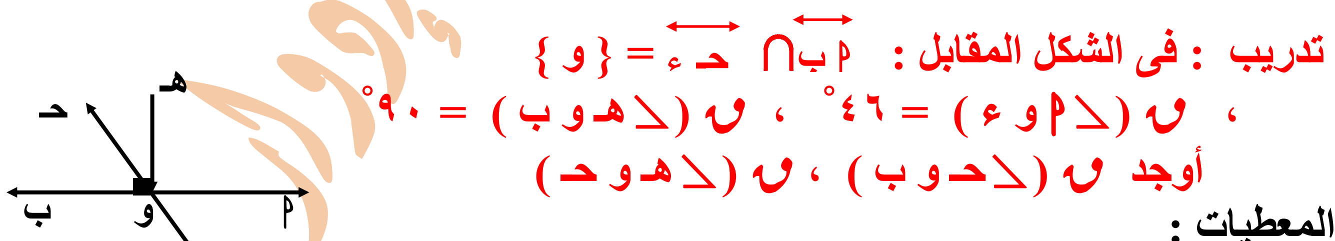
ΔΔ أ ء جـ ، أ هـ ب

فيهما:
- أ زاوية مشتركة　،　أ ء = أ هـ　[معطى]
- ق (∠ أ ء جـ) = ق (∠ أ هـ ب)　[معطى]

∴ Δ ب هـ أ ≡ Δ جـ ء أ　∴ ب هـ = جـ ء　وهو المطلوب أولا

وينتج أيضا : أ ب = أ جـ　(٢)　،　أ ء = أ هـ　(٣)

بطرح ٣ من ٢　أ ب ـ أ ء = أ جـ ـ أ هـ　∴ ء ب = هـ جـ



تدريب : فى الشكل المقابل : $\overleftrightarrow{أب} \cap \overleftrightarrow{حـ ء}$ = { و }

، ق (∠أ و ء) = ٤٦° ، ق (∠هـ و ب) = ٩٠°

أوجد ق (∠حـ و ب) ، ق (∠هـ و حـ)

المعطيات :

المطلوب :

البرهان :

تمارين

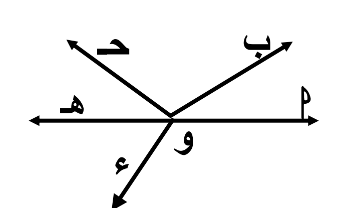
(١) فى الشكل المقابل :

$\overleftrightarrow{\text{أب}} \cap \overleftrightarrow{\text{حـ ء}}$ = { و } ، ق (∠ هـ و ء) = ٩٠°

، ق (∠ أ و ء) = ٤٠° أوجد : ق (∠ب و هـ) ، ق (∠ أ و حـ)

ق (∠ب و هـ) ، ق (∠ أ و حـ)

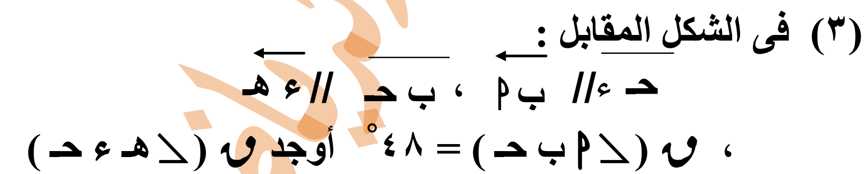
(٢) فى الشكل المقابل :



ق (∠ب و حـ) = ٢ ق (∠ أ و ب)

، ق (∠ أ و ب) = ٤٨° ، ق (∠ ء و هـ) = ٨٠°

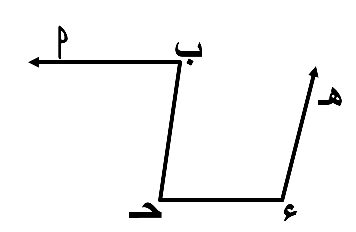
، ق (∠ حـ و هـ) أوجد ق (∠ أ و ء)

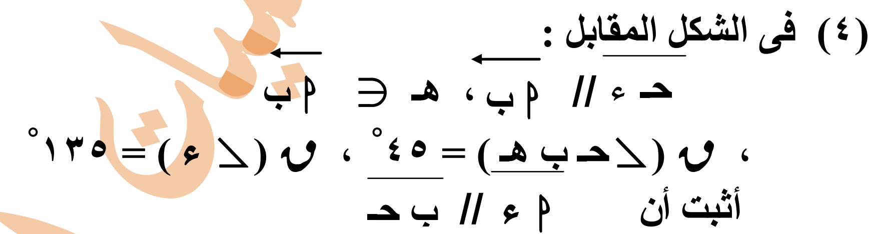


(٣) فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{حـ ء}}$ // $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ // $\overleftarrow{\text{ء هـ}}$

، ق (∠ أ ب حـ) = ٤٨° أوجد ق (∠ هـ ء حـ)



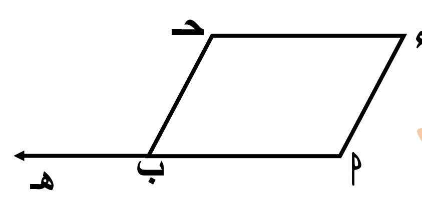


(٤) فى الشكل المقابل :

$\overline{\text{حـ ء}}$ // $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

، ق (∠ حـ ب هـ) = ٤٥° ، ق (∠ ء) = ١٣٥°

أثبت أن أ ء // ب حـ





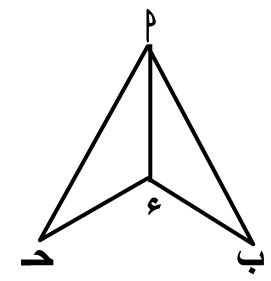
(٥) فى الشكل المقابل :

أ ب = أ حـ ، ب ء = حـ ء

، ق (∠ ب ء حـ) = ١١٠°

أثبت أن Δ أ ب ء ≡ Δ أ حـ ء

ثم أوجد ق (∠ أ ء حـ)



المضـــــلع

الخط البسيط : هو الخط الذى لا يقطع نفسه

الخط غير البسيط : هو الخط الذى يقطع نفسه

الخط المفتوح : هو الخط الذى نقطة بدايته غير نقطة نهايته

الخط المغلق : هو الخط الذى ينتهى عند النقطة التى بدأ منها



تدريب : فى الأشكال الآتية عين الخط البسيط ، الخط غير البسيط ، الخط المفتوح ، أو الخط المغلق



المضلع : هو خط مغلق بسيط مكون من إتحاد عدة قطع مستقيمة

ملاحظات : (١) كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع

(٢) يسمى المضلع بعدد أضلاعه

أمثلة :

المضلع المحدب :

فى المضلع المحدب أى مستقيم يتعين برأسين متتالين تكون بقية رؤوس المضلع واقعة فى أحد جانبى هذا المستقيم

ويلاحظ أن أى زاوية من زوايا ه قياسها أقل من ١٨٠°

المضلع المقعر : فى المضلع المقعر توجد مستقيمات تتعين برأسين متتالين و تقع بقية رؤوس المضلع على جانبى هذه المستقيمات

ويلاحظ أنه توجد زاوية واحدة على الأقل من زوايا ه قياسها أكبر من ١٨٠° (زاوية منعكسة)

إذا ذكر أى مضلع يقصد بذلك المضلع المحدب ما لم يذكر أنه مقعر

ملاحظات :

(١) كل قطعة مستقيمة منها تسمى ضلع مثل $\overline{\text{ب}}$ ٢

(٢) كل نقطة ناتجة عن تلاقى ضلعين متجاورين من أضلاع المضلع تسمى رأس مثل و

(٣) عدد أضلاع أى مضلع = عدد رؤوسه = عدد زواياه

(٤) كل زاوية ناتجة من إتحاد ضلعين من أضلاع المضلع تسمى

زاوية داخلة مثل ∠ ء أ؛ ∠ و ء حـ

(٥) إذا مد أحد أضلاع مضلع من إحدى جهتيه إلى ما لا نهاية تنتج زاوية تسمى

زاوية خارجة مثل ∠ ب حـ هـ

(٦) محيط المضلع هو = مجموع أطوال المضلع

(٧) القطعة المستقيمة الواصلة بين رأسين غير متتالين فى المضلع تسمى

قطر المضلع مثل و ب

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

إسم المضلع	عدد الأضلاع	عدد الرؤوس	عدد الزوايا	عدد الأقطار
الثلاثى (مثلث)	٣	٣	٣	صفر
الرباعى	٤	٤	٤	٢
الخماسى	٥			
السداسى	٦			
السباعى	٧			
الثمانى	٨			
التساعى	٩			
العشارى	١٠			
النونى	ن			

عدد أقطار مضلع عدد أضلاعه ن = $\frac{ن(ن - ٣)}{٢}$

مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع :

نعلم أن : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة = ١٨٠°

فإذا رسمت الأقطار الخارجة من أى رأس من رؤوس المضلع ينقسم المضلع لعدد من المثلثات نستنتج مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

إسم المضلع	عدد الأضلاع	عدد المثلثات الناتجة	مجموع قياسات الزوايا الداخلة
الرباعى	٤	٢	٢× ١٨٠° = ٣٦٠°
الخماسى	٥		
السداسى	٦		
السباعى	٧		
الثمانى	٨		
التساعى	٩		
العشارى	١٠		
النونى	ن		

عدد المثلثات التى ينقسم إليها مضلع عدد أضلاعه ن = ن – ٢

مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن – ٢) × ١٨٠°

فمثلا

- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمثلث = (٣ – ٢) × ١٨٠ = ١ × ١٨٠° = ١٨٠°
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الرباعى = (٤ – ٢) × ١٨٠°
= ٢ × ١٨٠° = ٣٦٠°
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل الخماسى = (٥ – ٢) × ١٨٠°
= ٣ × ١٨٠° = ٥٤٠°
- مجموع قياسات الزوايا الداخلة للشكل السداسى = (٦ – ٢) × ١٨٠°
= ٤ × ١٨٠° = ٧٢٠°

ملاحظة :

إذا مدت المستقيمات الحاملة لأضلاع مضلع من جهة واحدة و مأخوذة فى ترتيب دورى واحد ينتج :

عدد أضلاع المضلع = عـــدد رؤوسه

= عدد زواياه الداخلة

= عدد زواياه الخارجة

عند أى رأس من رؤوس المضلع يكون :

١
٢
٣

مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة = ١٨٠ °

مجموع قياسات الزوايا الخارجة لمضلع محدب عدد أضلاعه ى = ٣٦٠ °

∵ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ١٨٠ °

∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ى × ١٨٠ °

، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ى = (ى – ٢) × ١٨٠ °

∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة = ى × ١٨٠ ° – (ى – ٢) × ١٨٠ °

= ١٨٠ ى – ١٨٠ ى + ٣٦٠ ° = ٣٦٠ °

تدريب : أوجد مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى

∵ مجموع قياسى الزاويتين الداخلة والخارجة للمضلع عند أى رأس = ١٨٠ °

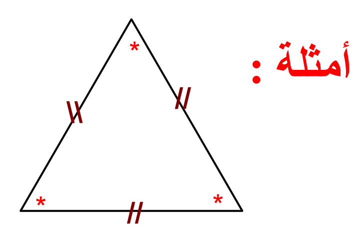
∴ مجموع قياسات الزوايا الداخلة والخارجة للمضلع السداسى = ...

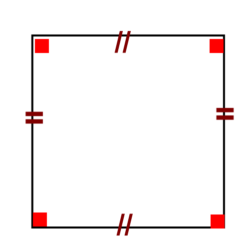
، ∵ مجموع قياسات الزوايا الداخلة للمضلع السداسى = ...

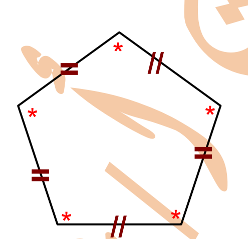
∴ مجموع قياسات الزوايا الخارجة للمضلع السداسى = ...

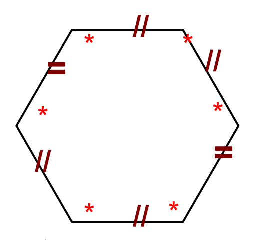
المضلع المنتظم : هو المضلع الذى تتساوى فيه أطوال أضلاعه وتتساوى قياسات زواياه

أمثلة :


مثلث متساوى الأضلاع


مربـــــع


خماسى منتظم


سداسى منتظم

قياس كل زاوية من زوايا مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه ى = $\frac{(ى - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ى}$

محيط مضلع منتظم مضلع عدد أضلاعه ى = طول الضلع × ى

عدد أضلاع المضلع المنتظم = $\frac{٣٦٠^\circ}{١٨٠^\circ - س^\circ}$ حيث س° قياس إحدى زواياه الداخلة

قياس كل زاوية من زوايا مضلع محدب منتظم عدد أضلاعه ن = $\frac{(ى - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ى}$

فمثلا :

قياس كل زاوية من الزوايا الثلاثى المنتظم (المثلث المتساوى الأضلاع) =

= $\frac{(٣ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٣}$ = $\frac{١ \times ١٨٠^\circ}{٣}$ = $\frac{١٨٠^\circ}{٣}$ = ٦٠ °

قياس كل زاوية من زوايا الرباعى المنتظم (المربع) = $\frac{(٤ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{٤}$

= $\frac{٢ \times ١٨٠^\circ}{٤}$ = $\frac{٣٦٠^\circ}{٤}$ = ٩٠°

قياس كل زاوية من زوايا الخماسى المنتظم = $\frac{(٥-٢) \times ١٨٠^\circ}{٥}$ = $\frac{٥٤٠^\circ}{٥}$ = ١٠٨°

قياس كل زاوية من زوايا السداسى المنتظم = $\frac{(٦-٢) \times ١٨٠^\circ}{٦}$ = $\frac{٧٢٠^\circ}{٦}$ = ١٢٠°

مثـ١ـال : أوجد مجموع القياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ١٢ ضلع

الحـــــــــــل

مجموع القياسات الزوايا الداخلة لمضلع عدد أضلاعه ن = (ن – ٢) × ١٨٠°

= (١٢ – ٢) × ١٨٠° = ١٠ × ١٨٠° = ١٨٠٠°

مثـ٢ـال : أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع منتظم عدد أضلاعه ١٢ ضلع

الحـــــــــــل

قياس كل زاوية من زوايا المضلع المنتظم = $\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ن}$

= $\frac{(١٢ - ٢) \times ١٨٠^\circ}{١٢}$ = $\frac{١٠ \times ١٨٠^\circ}{١٢}$ = $\frac{١٨٠٠^\circ}{١٢}$ = ١٥٠°

مثـ٣ـال : أوجد عدد أضلاع مضلع محدب منتظم قياس إحدى زواياه ١٢٠°

الحـــــــــــل

قياس كل زاوية من زوايا المضلع المنتظم = $\frac{(ں - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ں}$

١٢٠° = $\frac{(ں - ٢) \times ١٨٠^\circ}{ں}$

١٢٠° ں = (ں – ٢) × ١٨٠° ∴ ١٢٠° ں = ١٨٠° ں – ٣٦٠°

٣٦٠° = ١٨٠° ں – ١٢٠° ں ∴ ٣٦٠° = ٦٠° ں

∴ ں = $\frac{٣٦٠^\circ}{٦٠^\circ}$ = ٦ أضلاع

مثـ ٤ـال : أ ب جـ ء شكل رباعى فيه

ق(∠أ):ق(∠ب):ق(∠جـ):ق(∠ء) = ١ : ٢ : ٤ : ٥ أوجد قياس جميع زواياه

الحـــــــــــل

∵ ق(∠أ) + ق(∠ب) + ق(∠جـ) + ق(∠ء) = س + ٢س + ٤ س + ٥س

٣٦٠° = ١٢ س ∴ س = ٣٠°

∴ ق (∠أ) = ١ × ٣٠° = ٣٠° ∴ ق (∠ب) = ٢ × ٣٠° = ٦٠°

∴ق (∠جـ) = ٤ × ٣٠° = ١٢٠° ∴ق (∠ء) = ٥ × ٣٠° = ١٥٠°

تدريب : أوجد قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسى منتظم

قياس كل زاوية من الزوايا الداخلة لمضلع خماسى منتظم

= $\frac{(٥ - ....) \times ....}{....}$ = ...°

تدريب : مضلع منتظم قياس إحدى زواياه الداخلة ١٤٠° أوجد عدد أضلاعه

$\frac{(ن - ٢) \times ١٨٠}{ن}$ = ١٤٠° ∴ (ن - ٢) × ١٨٠° = ١٤٠ ن

∴ .... = ١٤٠ ن ∴ .... - = ١٤٠ ن = ...

∴ .... ن = ... ∴ ن = ... ∴ عدد أضلاع المضلع = ... ضلع

تدريب : أكمل الجدول الآتى :

عدد أضلاع مضلع منتظم	٣	٤			٧	٨	١٠	
قياس إحدى زواياه الداخلة			١٢٠°	١٣٥°				١٦٠°

تمارين

١ - أكمل ما يأتى :

(١) يكون المضلع منتظماً إذا كان .... ، ....

(٢) عدد المثلثات التى ينقسم إليها أى مضلع يساوى ....

(٣) مجموع قياسات زوايا المضلع الخماسى المنتظم = ...

(٤) قياس كل زاوية من زوايا المضلع السداسى المنتظم = ...

(٥) محيط مضلع منتظم طول ضلعه ٥ سم = ...

(٦) طول ضلع مضلع رباعى منتظم محيطه ١٦ سم = ...

(٧) المضلع الذى ليس له أقطار هو ....

(٨) عدد أقطار المضلع الرباعى = ...

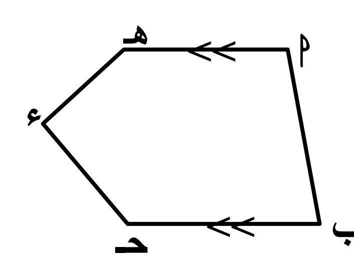
(٩) عدد أضلاع مضلع منتظم قياس إحدى زواياه ١٢٠° = ...

٢ – فى الشكل المقابل : ق(∠ أ) = ٨٠° ، ق(∠ء) = ١٢٠°
، هـ ∈ $\overleftarrow{أ ب}$ ، ق (∠حـ ب هـ) = ١٣٠° أوجد ق(∠ء حـ ب)

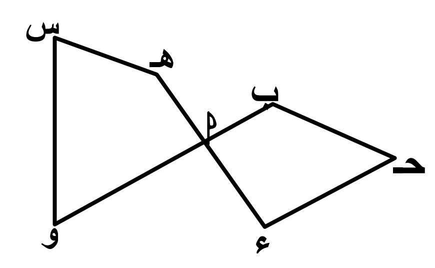
٣ – فى الشكل المقابل: $\overline{أ هـ} \cap \overline{حـ و} = \{ ء \}$ ،
ق(∠ أ) = ١٢٥° ، ق(∠حـ) = ١٠٠°
أوجد ق(∠حـ ب أ)

٤ – فى الشكل المقابل : ق(∠ أ) = ١٢٠°
، ق(∠ب) = ٦٠° ، هـ ∈ $\overleftarrow{ب حـ}$
، $\overrightarrow{حـ و}$ وينصف ∠ء حـ هـ أوجد ق(∠ و حـ هـ)
ثم أثبت أن $\overleftarrow{حـ و} // \overleftarrow{أ ب}$

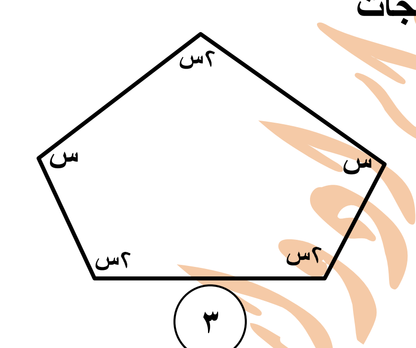
٥ – فى الشكل المقابل : أ ب حـ ء هـ شكل خماسى فيه $\overline{ب حـ} // \overline{أ هـ}$
ق(∠ حـ) = ١٢٠° ، ق(∠ء) = ٨٥°
أوجد ق(∠هـ)



٦ – فى الشكل المقابل : $\overline{ب و} \cap \overline{هـ ء} = \{ أ \}$
، ق(∠حـ) = ٤٥° ، ق(∠ب) = ١٢٠°
، ق(∠ ء) = ١٠٥° ، ق (∠ هـ) = ١٣٠°
، ق(∠ س) = ٨٠° أوجد ق(∠و)



٧ – فى الأشكال الآتية أوجد قياسات الزوايا : س ، ص ، بالدرجات



١ ٢ ٣

٨ – إذا كانت النسبة بين قياسات الزوايا الداخلة لمضلع خماسى هى ٢ : ٢ : ٣ : ٤ : ٤
أوجد أصغر زوايا هذا المضلع

٩ ــ عل للمضلع المنتظم زاوية داخلة قياسها ١٠٠° ؟ ولماذا ؟

١٠ ــ إذا كان قياس الزاوية الخارجة لمضلع منتظم = ٣٠°، و ما عدد أضلاع هذا المضلع ؟ ، و ما مجموع قياسات زواياه الداخلة ؟

١١ ــ مضلع له تسعة أضلاع و مجموع قياسات ثمان من زواياه هو ١١٤٠° أوجد قياس الزاوية التاسعة ، هل يمكن أن يكون هذا المضلع منتظماً ؟ و لماذا ؟

١٢ ــ مضلع عدد أضلاعه ١٥ ضلع فإذا كان مجموع قياسات خمسة من زواياه الخارجة يساوى ٢٠٠° أوجد مجموع قياسات الزوايا العشرة الداخلة غير المجاورة للزوايا الخمسة الخارجة

متـــوازى الأضلاع

متوازى الأضلاع : هو شكل رباعى فيه كل ضلعان متقابلان متوازيان

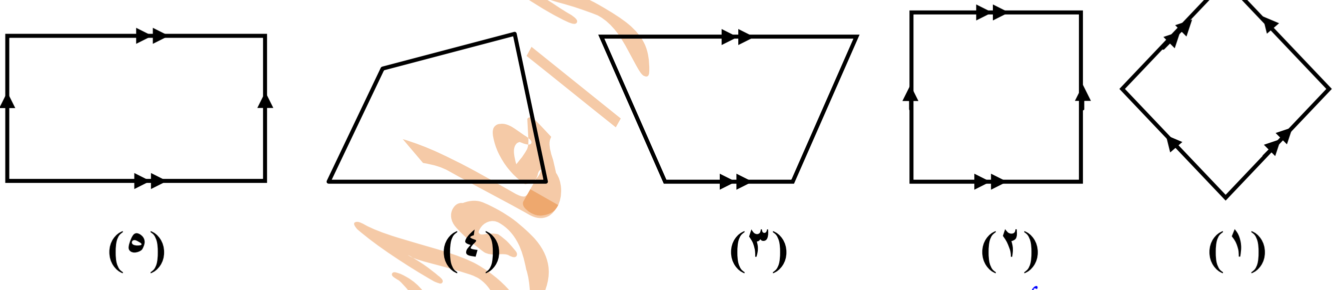
فى الشكل المقابل : إذا كان : $\overline{\text{ϡ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ϡ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

فإن : الشكل ϡ ب حـ ء يكون متوازى أضلاع

، وبالعكس إذا كان : الشكل ϡ ب حـ ء يكون متوازى أضلاع

فإن : $\overline{\text{ϡ ب}}$ // $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ϡ ء}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

تدريب : فى الأشكال المقابلة بين أى منها متوازى أضلاع



(١) (٢) (٣) (٤) (٥)

خواص متوازى الأضلاع :

إرسم متوازى الأضلاع ϡ ب حـ ء

قس أطوال أضلاعه : $\overline{\text{ϡ ب}}$ ، $\overline{\text{ء حـ}}$ ، $\overline{\text{ϡ ء}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$

ماذا تلاحظ ؟

قس قياسات زواياه : ∠ ϡ ، ∠ ب ، ∠ حـ ، ∠ ء

ماذا تلاحظ ؟

و إذا وصلنا قطراه $\overline{\text{ϡ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ بحيث يتقاطعان فى م

قس أطوال : $\overline{\text{م م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$ ، $\overline{\text{حـ م}}$ ، $\overline{\text{ء م}}$

ماذا تلاحظ ؟

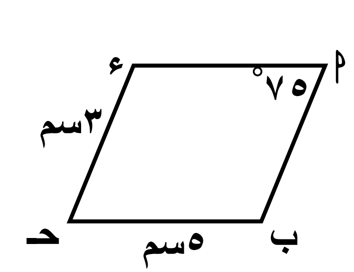
خواص متوازى الأضلاع :

(١) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول
(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس
(٣) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر

ملاحظة : يكون الشكل الرباعى متوازى أضلاع إذا توافر فيه أحد الشروط الآتية :

(١) كل ضلعين متقابلين متوازيان
(٢) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول
(٣) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس
(٤) كل زاويتين متتاليتين متكاملتان
(٥) القطران ينصف كل منهما الآخر
(٦) ضلعان متقابلان متوازيين ومتساويين فى الطول

مثــ١ــال: فى الشكل المقابل : م ب حـ ء متوازى أضلاع



أكمل ما يأتى : $\overline{\text{م ب}}$ // $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

م ب = حـ ء = ٣ سم ، م ء = ب حـ = ٥ سم

ق (∠ م) = ق(∠جـ) = ٧٥° ،

ق (∠ب) = ق(∠ ء) = ١٨٠° ـ ٧٥° = ١٠٥°

محيط متوازى الأضلاع م ب حـ ء = (٥ + ٣) × ٢ = ١٦ سم

مثــ٢ــال: فى الشكل المقابل :

م ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ∈ $\overleftarrow{\text{حـ ب}}$ بحيث

حـ ب = ب هـ أثبت أن : م هـ ب ء متوازى أضلاع

الحـــــــل

المعطيات : م ب حـ ء متوازى أضلاع ، حـ ب = ب هـ

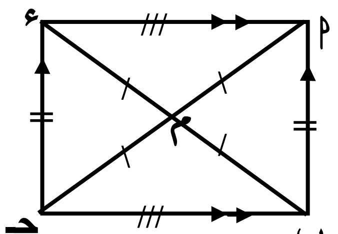
المطلوب : أثبت أن : م هـ ب ء متوازى أضلاع

البرهــان : ∵ م ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ م ء = ب جـ ، $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{حـ ب}}$

، ∵ حـ ب = ب هـ ∴ م ء = ب هـ ، $\overline{\text{م ء}}$ // $\overline{\text{هـ ب}}$

∴ م هـ ب ء متوازى أضلاع

حالات خاصة من متوازى الأضلاع .



(١) المستطيل : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة

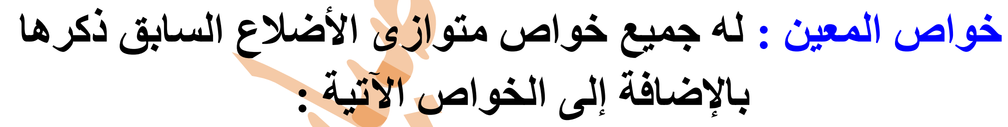
أ، هو متوازى أضلاع قطراه متساويان فى الطول

خواص المستطيل : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول

(٢) المعين : هو متوازى أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو متوازى أضلاع قطراه متعامدان



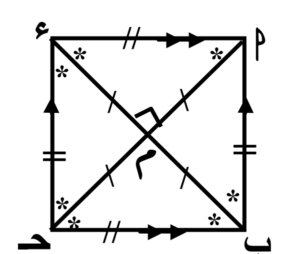
خواص المعين : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية فى الطول
* قطراه متعامدان و كل منهما قطر ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما

(٣) المربع : هو متوازى أضلاع إحدى زواياه قائمة وفيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان فى الطول

أ، هو معين إحدى زواياه قائمة

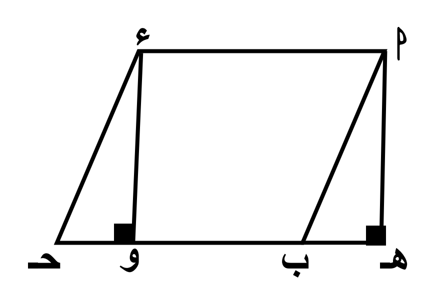


خواص المربع : له جميع خواص متوازى الأضلاع السابق ذكرها بالإضافة إلى الخواص الآتية :

* أضلاعه متساوية فى الطول
* زواياه متساوية فى القياس وقياس كل منها = ٩٠°
* قطراه متساويان فى الطول و متعامدان و كل من قطراه ينصف زاويتى الرأس الواصل بينهما

لإثبات أن : أى شكل هومتوازى الأضلاع أو مستطيل أو معين أو مربع

نثبت أحد خواص الشكل المطلوب إثباته



مثـــ٣ـــال: فى الشكل المقابل : م ب حـ ء متوازى أضلاع ،
م هـ ⊥ حـ ب ، ء و ⊥ حـ ب ،
هـ ب = حـ و أثبت أن : م هـ و جـ مستطيل

الحـــــــل

المعطيات : م ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ ب = جـ و

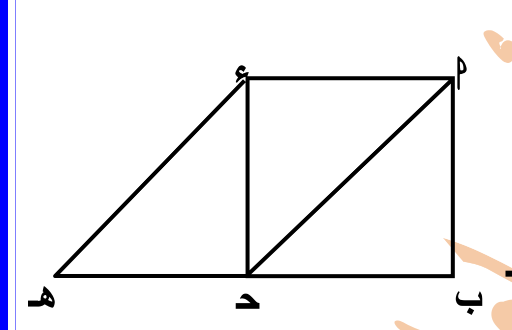
المطلوب : أثبت أن م هـ و جـ مستطيل

البرهــان : ∵ م ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ م ء = ب جـ ، م ء // ب جـ (١)

، ∵ هـ ب = و جـ ∴ هـ و = ب جـ ، م ء // هـ و (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : م هـ و حـ متوازى أضلاع

، ∵ م هـ ⊥ هـ و ∴ م هـ و جـ مستطيل



مثـــ٤ـــال: فى الشكل المقابل : م حـ هـ ء معين ،
هـ ∈ ب حـ بحيث ب حـ = حـ هـ ،
ء حـ ⊥ ب حـ أثبت أن : م ب حـ ء مربع

الحـــــــل

المعطيات : م حـ هـ ء معين ، ب حـ = حـ هـ ، م ب ⊥ ب جـ

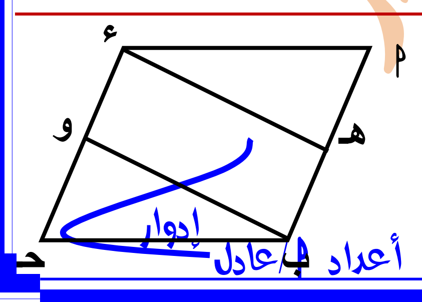
المطلوب : أثبت أن : م ب حـ ء مربع

البرهــان : ∵ م حـ هـ ء معين ∴ م ء = م جـ = جـ هـ = هـ ء (١)

، ∵ ب حـ = حـ هـ ∴ م ب = ب جـ = جـ ء = ء م (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : م ب حـ ء معين

، ∵ د جـ ⊥ ب جـ ∴ م ب حـ ء مربع



مثـــ٥ـــال: م ب حـ ء متوازى أضلاع ، هـ منتصف م ب
، و منتصف حـ ء . أثبت أن : ء هـ ب و متوازى أضلاع

البرهــان : ∵ ٩ ب حـ ء متوازى أضلاع ∴ ٩ ب = ء جـ ، ٩ ب // ء جـ

، ∵ هـ منتصف ٩ ب ، و منتصف ء جـ

∴ هـ ب = ½ ٩ب ، و ء = ½ ء جـ

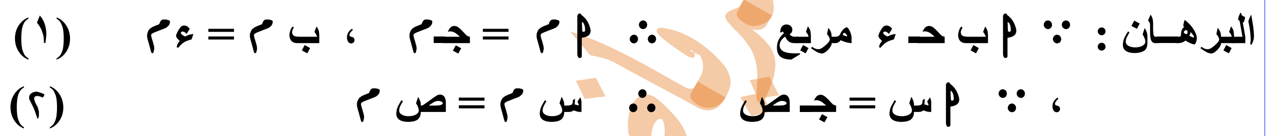
∴ هـ ب = و ء ، هـ ب // ء م ∴ ء هـ ب و متوازى أضلاع

مثــ٦ــال: فى الشكل المقابل : ٩ ب حـ ء مربع تقاطع قطراه فى م
، س ، ص ∈ ٩ حـ بحيث ٩ س = حـ ص
أثبت أن س ب ص ء معين

الحــــــــل

المعطيات : ٩ ب حـ ء مربع ، ٩ س = حـ ص

المطلوب : أثبت أن س ب ص ء معين



البرهــان : ∵ ٩ ب حـ ء مربع ∴ ٩ م = جـم ، ب م = ءم (١)

، ∵ ٩ س = جـ ص ∴ س م = ص م (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن : ∴ ب ء ، س ص ينصف كل منهما الآخر

، ∵ ٩ حـ ⊥ ب ء ∴ س ص ⊥ ب ء ∴ الشكل س ب ص ء معين

تدريبات : (١) أكمل الجدول التالى بوضع علامة ✓ أمام كل خاصية للشكل :

الخواص	متوازى الأضلاع	المستطيل	المعين	المربع
كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول	✓	✓	✓	✓
كل ضلعين متقابلين متوازيان				
كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس				
القطران ينصف كل منهما الآخر				
القطران متساويان فى الطول				
القطران متعامدان				
الأضلاع متساوية فى الطول				
القطران ينصفان زاويتى الرأس المرسومة بينهما	×	×	✓	✓
الزوايا قائمة				

تمـــــارين

[١] أكمل ما يأتى :

(١) قطرا المعين .... ، ....

(٢) إذا كانت الزوايا الداخلة فى الشكل الرباعى متساوية فى القياس فإنه يكون .... أ، ....

(٣) المربع هو .... أضلاعه ....

(٤) فى متوازى الأضلاع إذا تساوى القطران فى الطول فإنه يكون ....

(٥) المربع هو .... إحدى زواياه قائمة

(٦) قطرا المستطيل .... ، ....

(٧) فى المربع القطران .... ، .... ، .... ، ....

(٨) متوازى الأضلاع الذى قطراه متعامدان ومتساويان فى الطول يسمى ....

(٩) قياس الزاوية المحصورة بين ضلع المربع وقطره = ...

(١٠) فى متوازى الأضلاع ا ب حـ ء إذا كان ق(∠ ا) = ٧٠° فإن ق(∠ حـ) = ... °

(١١) فى متوازى الأضلاع ا ب حـ ء إذا كان ق(∠ ا) = ٧٠° فإن ق(∠ ب) = ... °

(١٢) فى المعين ا ب حـ ء إذا كان ق(∠ ا حـ ب) = ٤٠° فإن ق(∠ ء) = ... °

(١٣) القطران متساويان فى الطول فى .... ومتعامدان وغير متساويين فى الطول .... ومتساويين فى الطول ومتعامدين فى...........

[٢] فى الشكل المقابل : Δ ا ب حـ فيه ب حـ = ٦ سم ، و منتصف ب حـ


، ء ∈ ا ب ، هـ ∈ ا حـ بحيث ء هـ // ب حـ

، ء هـ = ٣ سم أثبت أن ء هـ و ب متوازى أضلاع

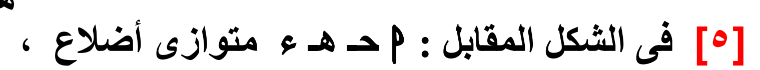
[٣] فى الشكل المقابل : ا ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م ، س ، ص ∈ ا حـ بحيث ا س = حـ ص

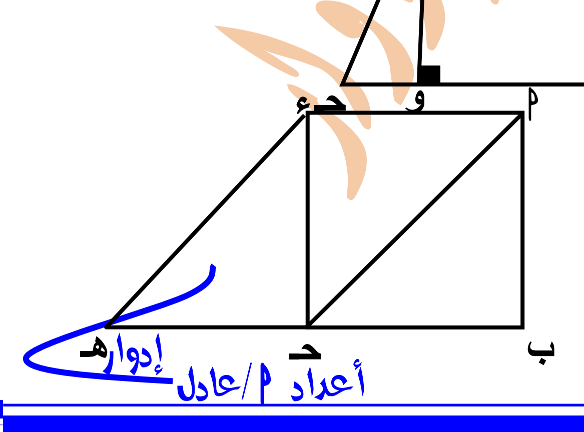
أثبت أن : س ب ص ء متوازى أضلاع

[٤] فى الشكل المقابل : ا هـ و ء مستطيل، هـ ب = حـ و

أثبت أن : ا ب حـ ء متوازى أضلاع

[٥] فى الشكل المقابل : ا حـ هـ ء متوازى أضلاع ،


هـ ∈ ب حـ بحيث ب حـ = حـ هـ ، ء حـ ⊥ ب حـ أثبت أن : ا ب حـ ء مربع



المثلث

نظرية (١) : مجموع قياسات زوايا المثلث الداخلة يساوى ١٨٠°

المعطيات : أ ب حـ مثلث

المطلوب : إثبات أن :

ق (∠ب أ حـ) + ق (∠ب) + ق (∠حـ) = ١٨٠°

العمـــل : من نقطة أ نرسم س ص // ب حـ

البرهان : ∵ س ص // ب حـ

∴ ق (∠ب أ س) = ق (∠ب) بالتبادل (١)

، ق (∠ب أ ص) = ق (∠حـ) بالتبادل (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج

ق (∠ب أ س) + ق (∠ب أ ص) = ق (∠ب) + ق (∠حـ)

بإضافة ق (∠ب أ حـ) للطرفين ينتج

ق (∠ب أ س) + ق (∠ب أ ص) + ق (∠ب أ حـ) =

ق (∠ب) + ق (∠حـ) + ق (∠ب أ حـ)

، ∵ ق (∠ب أ س) + ق (∠ب أ ص) + ق (∠ب أ حـ) = ١٨٠°

∴ ق (∠ب) + ق (∠حـ) + ق (∠ب أ حـ) = ١٨٠° وهو المطلوب

مثـ١ـال : مثلث أب جـ فيه : ق (∠أ) = ٥٠° ، ق (∠ب) = ٦٠° أوجد ق (∠جـ)

الحـــــــــل

ق (∠جـ) = ١٨٠° – [٥٠° + ٦٠°] = ١٨٠° – ١١٠° = ٧٠°

مثـ٢ـال : مثلث قياسات زواياه ٢ س ، ٣س ، ٤ س من الدرجات أوجد قيمة س

الحـــــــــل

∵ مجموع الزوايا الداخلة = ١٨٠°

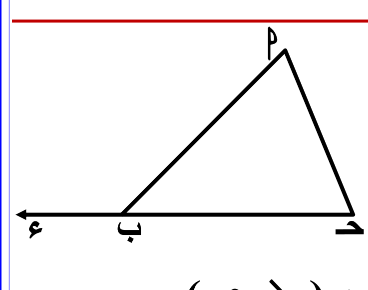
∴ ٢ س + ٣ س + ٤ س = ١٨٠°

∴ ٩ س = ١٨٠° ∴ س = $\frac{١٨٠°}{٩}$ = ٢٠°

مثـــ٣ـــال: Δ أ ب حـ فيه : ق (∠ أ) = ٦٣° ، ق (∠ب) = ٤٥° أوجد ق (∠حـ)

الحــــــــــــل

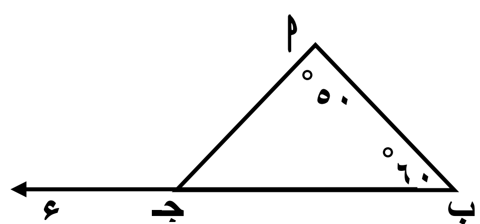
ق (∠جـ) = ١٨٠° – [٥٠° + ٦٠°] = ١٨٠ ° – ١١٠ ° = ٧٠°



نتيجة (١) : قياس أى زاوية خارجة للمثلث يساوى مجموع قياسى الزاويتين الداخلتين عدا قياس الزاوية المجاورة لها

فى الشكل المقابل : إذا كان : أ ب حـ مثلث ، ء ∈ $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

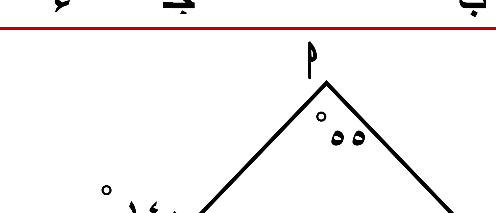
فإن : ق (∠ أ ب ء) = ق (∠ أ) + ق (∠ حـ)



مثـــ١ـــال : فى الشكل المقابل

∵ ∠ أ جـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ

ق (∠ أ جـ ء) = ٥٠° + ٥٠° = ١١٠°



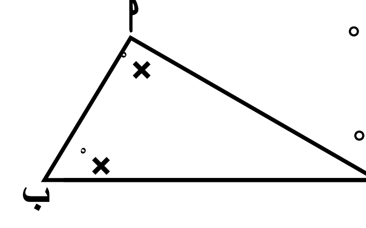
مثـــ٢ـــال : فى الشكل المقابل

∵ ∠ أ جـ ء خارجة عن Δ أ ب حـ

ق (∠ب) = ١٤٠° _ ٥٥° = ٨٥°



مثـــ٣ـــال : فى الشكل المقابل ق (∠أ) = ق (∠ب)



ق (∠ أ جـ ء) الخارجة = ق (∠أ) + ق (∠ب) = ١٥٠°

فإن : ق (∠أ) = ٧٥° ، ق (∠ب) = ٧٥°

ق (∠أ جـ ب) = ١٨٠° _ ١٥٠° = ٣٠°

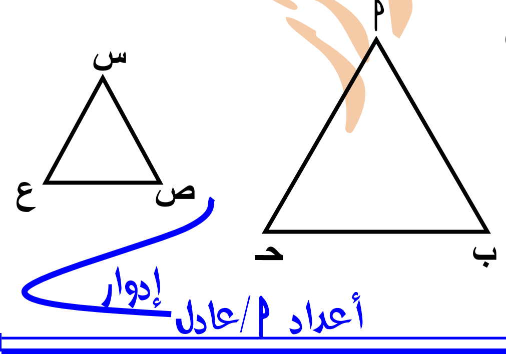
نتيجة (٢) : إذا ساوى قياسا زاويتين فى مثلث قياسا زاويتين فى مثلث آخر فإن قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الأول قياس الزاوية الثالثة فى المثلث الآخر

فى الشكل المقابل : إذا كان فى Δ أ ب حـ ، Δ س ص ع

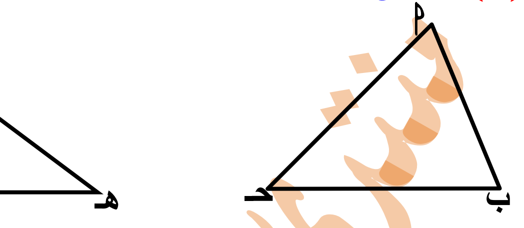
ق (∠ أ) = ق (∠س)

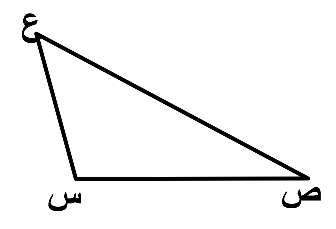
، ق (∠ ب) = ق (∠ص)

فإن : ق (∠ حـ) = ق (∠ع)



نتيجة (٣) : فى أى مثلث توجد زاويتان حادتان على الأقل





المثلث حاد الزوايا	المثلث قائم الزاوية	المثلث منفرج الزاوية
ق (∠أ) حادة	ق (∠هـ) حادة	ق (∠ص) حادة
ق (∠ب) حادة	ق (∠و) حادة	ق (∠ع) حادة
ق (∠حـ) حادة	ق (∠ء) قائمة	ق (∠س) منفرجة

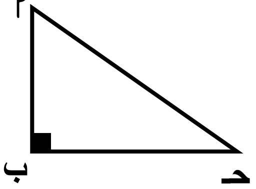
ملاحظات :

(١) إذا كانت إحدى زوايا المثلث قائمة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخريين يساوى ٩٠ °
(أى أن كل منهما حادة)

(٢) إذا كانت إحدى زوايا المثلث منفرجة فإن مجموع قياسى الزاويتين الأخريين اقل من ٩٠ °
(أى أن كل منهما حادة)

(٣) إذا لم تكن إحدى زوايا المثلث قائمة أو منفرجة كانت زواياه الثلاثة حادة

نتيجة (٤) : إذا ساوى قياس زاوية فى مثلث مجموع قياسى الزاويتين الأخريين كان المثلث قائم الزاوية



فى الشكل المقابل : إذا كان فى Δأ ب حـ

ق (∠ب) = ق (∠أ) + ق (∠حـ)

فإن : ق (∠ب) = ٩٠ °

ملاحظة : إذا كان : ق (∠ب) > ق (∠أ) + ق (∠حـ)

فإن : ق (∠ب) > ٩٠ ° أى أن : Δ أ ب حـ منفرج الزاوية فى ب

مثـــال ١ : Δأ ب حـ فيه : ق (∠ب) = ٤٥ ° ، ق (∠ب) = ق (∠حـ)

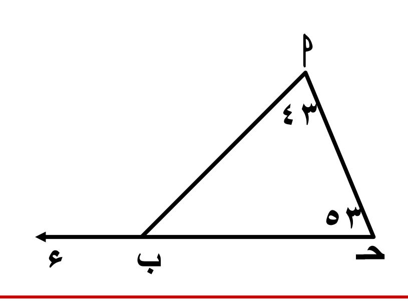
أوجد ق (∠أ)

الحـــــــــل

البرهـان : ∵ ق (∠ب) = ق (∠جـ) = ٤٥ °

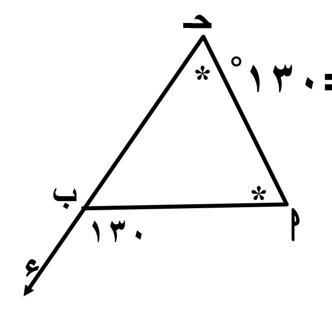
∴ ق (∠أ) = ١٨٠ ° ـ (٤٥ ° + ٤٥ °) = ٩٠ °

مثــ٢ــال: في الشكل المقابل : ق (∠ ٩) = ٤٣°
، ق (∠ حـ) = ٥٣° أوجد : ق (∠ ٩ ب ء)



البرهــان : ∵ ∠ ٩ ب ء خارجة عن △ ٩ ب حـ
∴ ق (∠ ٩ ب ء) = ٤٣° + ٥٣° = ٩٦°

مثــ٣ــال: في الشكل المقابل : ق (∠ ٩) = ق (∠ حـ)
، ق (∠ ٩ ب ء) = ١٣٠° أوجد : ق (∠ حـ)



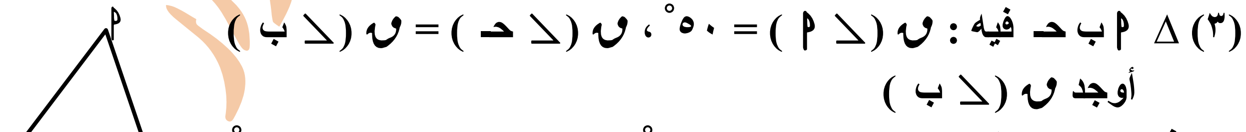
البرهــان: ق (∠ ٩ جـ ء) الخارجة = ق (∠ ٩) + ق (∠ ب) = ١٣٠°
فإن : ق (∠ ٩) = ٦٥° ، ق (∠ ب) = ٦٥° ،
ق (∠ ٩ جـ ب) = ١٨٠° ـ ١٣٠° = ٥٠°

مثــ٤ــال: في الشكل المقابل : △ ٩ ب حـ قائم الزاوية فى ٩
، ٩ ء ⊥ ب حـ ، ق (∠ ب ٩ ء) = ق (∠ ٩ حـ ء)
برهن أن : ق (∠ حـ ٩ ء) = ق (∠ ب)

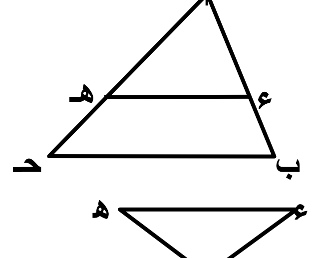
البرهــان : ∵ △ ٩ ب ء ، △ حـ ٩ ء فيهما :
ق (∠ ب ٩ ء) = ق (∠ ٩ جـ ء) معطى
، ق (∠ ب ٩ ء) = ق (∠ جـ ء ٩) قائمة
∴ الثالثة = الثالثة ∴ ق (∠ حـ ٩ ء) = ق (∠ ب)

تمـــارين

(١) △ ٩ ب حـ فيه : ق (∠ ب) = ٤٠° ، ق (∠ حـ) = ٦٠° أوجد ق (∠ ٩)
(٢) △ ٩ ب حـ منفرج الزاوية فيه قياسا زاويتين متساويين فإذا كان : ق (∠ ب) = ١١٠°
أوجد ق (∠ ٩)
(٣) △ ٩ ب حـ فيه : ق (∠ ٩) = ٥٠° ، ق (∠ حـ) = ق (∠ ب)
أوجد ق (∠ ب)

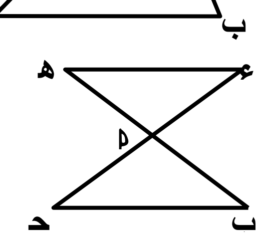


(٤) فى الشكل المقابل : ق (∠ ٩) = ٥٠° ، ق (∠ ٩ حـ هـ) = ١٣٠°
أوجد بالبرهان : ق (∠ ٩ ب حـ) ، ق (∠ ٩ ب ء)



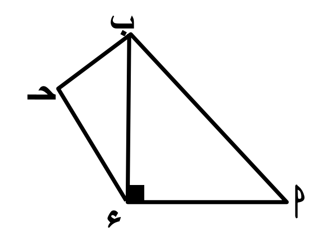
(٥) فى الشكل المقابل : ق (∠ أ) = ٣٨° ، ق (∠ ب) = ٧٦° ، ب حـ // ء هـ

أوجد بالبرهان : ق (∠ أ هـ ء)



(٦) فى الشكل المقابل : ب حـ // ء هـ ، ب حـ ∩ ء هـ = { أ }

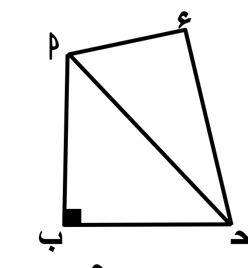
ق (∠ ب) = ٣٥° ، ق (∠ حـ) = ٣٠° : أحسب قياسات زوايا Δ أ ء هـ



(٧) فى الشكل المقابل : أ ب // ء حـ ، ق (∠ أ ء ب) = ٩٠°

، ق (∠ أ ب ء) = ٤٧° ، ق (∠ ء ب حـ) = ٢٠°

أوجد : ق (∠ أ) ، ق (∠ حـ)

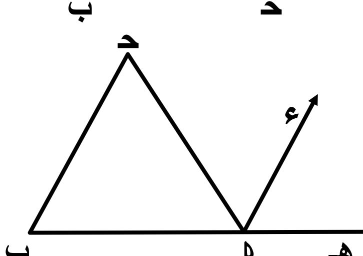


(٨) فى الشكل المقابل : ق (∠ أ ب حـ) = ٩٠° ،

ق (∠ ء أ حـ) = ٨٠° ، ق (∠ أ ء حـ) = ٧٠°

، ق (∠ ب أ حـ) = ٦٠° أثبت أن :

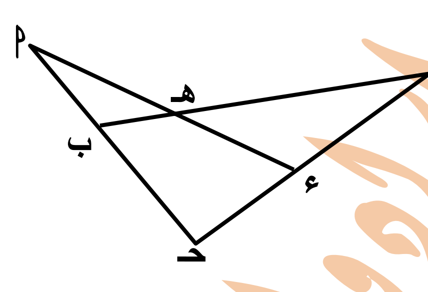
حـ أ ينصف ب حـ ء



(٩) فى الشكل المقابل : ق (∠ ء أ حـ) = ٧٣° ،

ق (∠ ب أ حـ) = ٥٨° ، ق (∠ ب) = ٥٠°

أثبت أن : ب أ // ب حـ

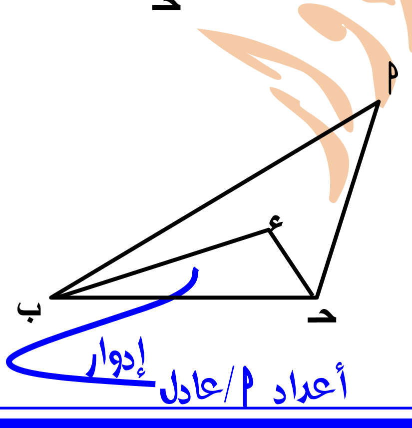


(١٠) فى الشكل المقابل : ب ∈ أ حـ ، ء ∈ حـ و

، أ ء ∩ ب و = { هـ } ، ق (∠ و) = ٣٤°

، ق (∠ أ هـ ب) = ٢٤° ، ق (∠ حـ) = ١٠٠°

أوجد : ق (∠ أ)



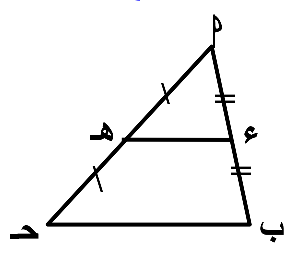
(١١) فى الشكل المقابل : ق (∠ أ) = ٣٠°

، ب ء ينصف ∠ أ ب حـ

، حـ ء ينصف ∠ أ حـ ب

أوجد : ق (∠ ء)

نظرية (٢): الشعاع المرسوم من منتصف ضلع فى مثلث موازياً أحد الضلعين الآخرين ينصف الضلع الثالث



المعطيات : Δ ٢ ب حـ فيه ء منتصف ٢ ب ، رسم ء هـ // ب حـ

المطلوب : إثبات أن : ٢ هـ = هـ حـ

العمـــل : نرسم ٢ و // ب حـ

البرهان : ∵ ٢ و // ب حـ // ء هـ ، ٢ ب ، ٢ حـ قاطعين لهما ، ٢ ء = ء ب

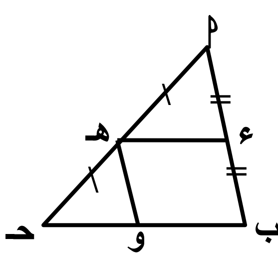
∴ ٢ هـ = هـ حـ وهو المطلوب

نتيجة: القطعة المستقيمة المرسومة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث

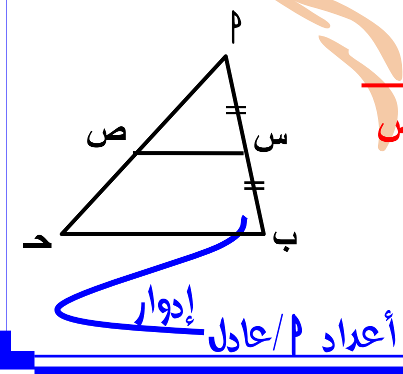
فى الشكل المقابل : إذا كان :

Δ ٢ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى ٢ ب ، ٢ حـ

على الترتيب فإن : ء هـ // ب حـ



نظرية (٣) : القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى الضلع الثالث وطولها يساوى نصف طول هذا الضلع



المعطيات : Δ ٢ ب حـ فيه ء منتصف ٢ ب ، هـ منتصف ٢ حـ

المطلوب : إثبات أن : ء هـ // ب حـ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ

العمـــل : نرسم هـ و // ٢ ب

البرهان : Δ ٢ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى ٢ ب ، ٢ حـ

على الترتيب فإن : ء هـ // ب حـ

∵ هـ و // ٢ ب ∴ و منتصف ب حـ ∴ ب و = $\frac{1}{2}$ ب حـ

∴ الشكل ء ب و هـ متوازى أضلاع ، ء هـ = ب و

∴ ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب حـ وهو المطلوب

مثـــال١: فى الشكل المقابل : س منتصف ٢ ب ، ص ∈ ٢ حـ ، س ص // ب حـ ، ٢ حـ = ٦ سم أوجد طول ٢ ص

المعطيات : Δ ٢ ب حـ فيه س منتصف ٢ ب ، س ص // ب حـ

٢ ص

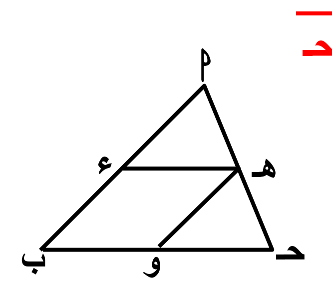
المطلوب : أوجد طول

البرهان : Δ ؏ ب حـ فيه س منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب حـ}}$

∴ ص منتصف $\overline{\text{؏ حـ}}$ ، ∵ ؏ حـ = ٦ سم

∴ ؏ ص = $\frac{1}{2}$ × ٦ = ٣ سم

مثــ٢ــال : فى الشكل المقابل : ء منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{ب حـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{؏ب}}$ أثبت أن ء هـ و ب متوازى أضلاع



المعطيات : ء منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، و منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$ ، $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{؏ ب}}$

المطلوب : أثبت أن ء هـ و ب متوازى أضلاع

البرهان : Δ ؏ ب حـ فيه ء ، هـ منتصفى $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{؏ جـ}}$

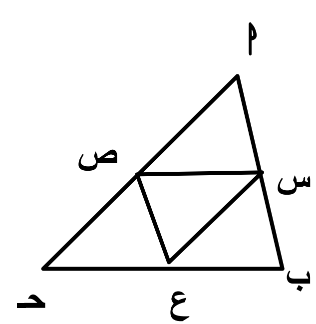
∴ $\overline{\text{ء هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

، ∵ $\overline{\text{هـ و}}$ // $\overline{\text{؏ ب}}$ ∴ ء هـ و ب متوازى أضلاع

مثــ٣ــال:فى الشكل المقابل Δ؏ ب حـ فيه ؏ ب = ٨ سم، ب حـ = ٦ سم،؏ جـ =١٠سم ، س ، ص ، ع منتصفات $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{؏ حـ}}$ ، $\overline{\text{ب حـ}}$ أوجد محيط Δس ص ع

البرهان: ∵ س منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$ ∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∵ ب جـ = ٦ سم ∴ س ص = $\frac{1}{2}$ ×٦ = ٣ سم



س منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ س ع = $\frac{1}{2}$؏جـ

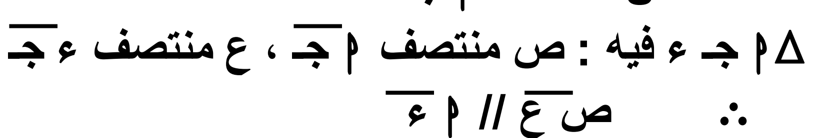
∵ ؏ جـ = ١٠ سم ∴ س ص = $\frac{1}{2}$ ×١٠ = ٥ سم

ع منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ ∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ ؏ ب

∵ ؏ ب = ٨ سم ∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ ×٨ = ٤ سم

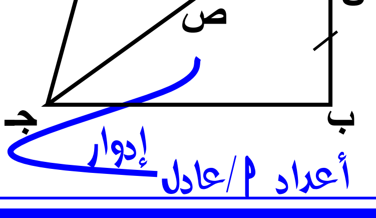
∴ محيط Δ س ص ع = ٣+ ٥ + ٤ = ١٢ سم

مثــ٤ــال: فى الشكل المقابل إذا كانت س منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$ أثبت أن $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{؏ ء}}$ ثم أوجد طول $\overline{\text{ص ع}}$



البرهان : Δ؏ ب جـ فيه : س منتصف $\overline{\text{؏ ب}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$

∴ ص منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$



Δ؏ جـ ء فيه : ص منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{ء جـ}}$

∴ $\overline{\text{ص ع}}$ // $\overline{\text{؏ ء}}$

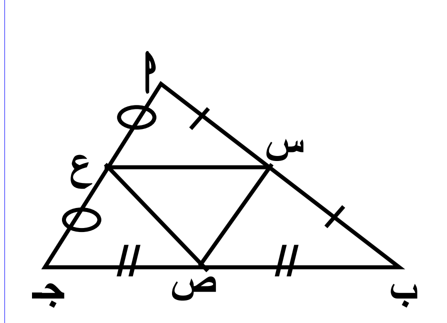
Δ؏ جـ ء فيه : ص منتصف $\overline{\text{؏ جـ}}$ ، ع منتصف ء جـ

∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ أ ء

∵ أ ء = ١٠ سم　　　∴ ص ع = ٥ سم

مثـ٥ـال: فى الشكل المقابل: س ، ص ، ع منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، أ ب = ١٠ سم ، ب جـ = ٨ سم ، أ جـ = ١٢ سم أوجد محيط △ س ص ع

الحـــــــــــل



س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$　∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∵ ب جـ = ٨ سم　∴ س ع = ٤ سم

س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$　∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ

∵ أ جـ = ١٢ سم　∴ س ص = ٦ سم

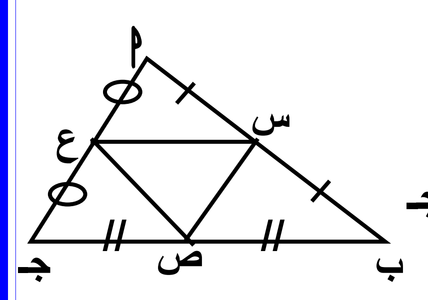
ع منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$　∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ أ ب

∵ أ ب = ١٠ سم　∴ ص ع = ٥ سم

∴ محيط △ س ص ع = ٤ + ٦ + ٥ = ١٥ سم

مثـ٦ـال: فى الشكل المقابل : س ، ص ، ع منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ ، س ص = ٣سم ، ص ع = ٥ سم ، س ع = ٦ سم أوجد محيط △ س ص ع

الحـــــــــــل



∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ع منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$　∴ س ع = $\frac{1}{2}$ ب جـ

∵ س ع = ٦سم　∴ ب جـ = ١٢ سم

∵ س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$　∴ س ص = $\frac{1}{2}$ أ جـ

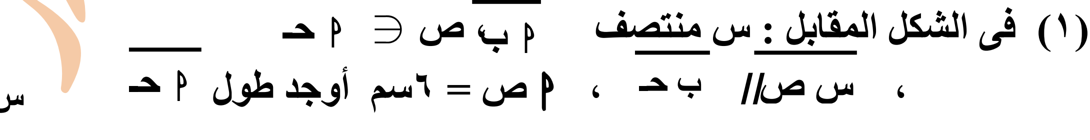
∵ س ص = ٣ سم　∴ أ جـ = ٦ سم

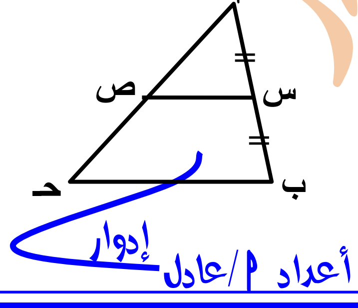
∵ ع منتصف $\overline{\text{أ جـ}}$ ، ص منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$　∴ ص ع = $\frac{1}{2}$ أ ب

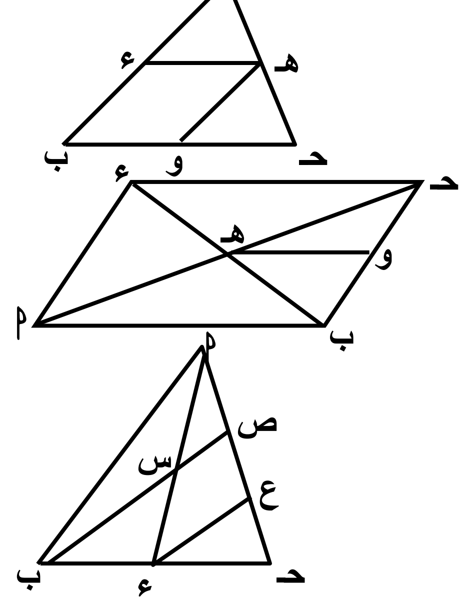
∵ ص ع = ٥ سم　∴ أ ب = ١٠ سم

∴ محيط △ أ ب جـ = ١٢ + ٦ + ١٠ = ٢٨ سم

تمـــــارين


(١) فى الشكل المقابل : س منتصف $\overline{\text{أ ب}}$ ، ص ∈ $\overline{\text{أ حـ}}$ ، س ص // ب حـ ، أ ص = ٦سم أوجد طول $\overline{\text{أ حـ}}$





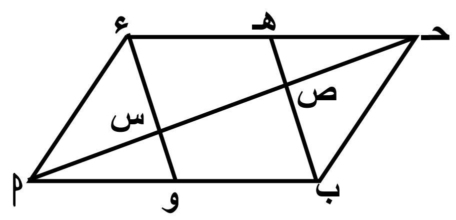
(٢) فى الشكل المقابل : ء منتصف ا ب ، ء هـ // ب حـ

، هـ و // ا ب أثبت أن : ب و = و حـ

(٣) فى الشكل المقابل : ا ب حـ ء متوازى أضلاع تقاطع

قطراه فى هـ ، رسم هـ و // ا ب

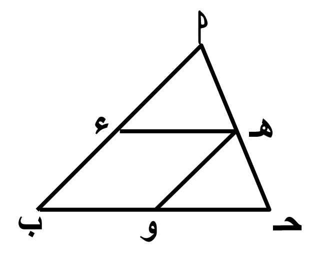
أثبت أن : حـ و = و ب



(٤) فى الشكل المقابل : ء منتصف ب حـ ، س منتصف ا ء

، ء ع // ب ص ، ا حـ = ٦ سم

أوجد : طول ا ص

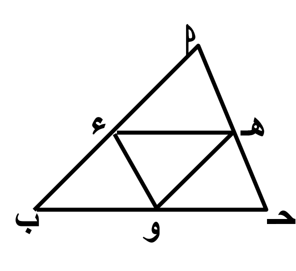


(٥) فى الشكل المقابل : ا ب حـ ء متوازى أضلاع

، و ، هـ منتصفى ا ب ، ء حـ على الترتيب

أثبت أن : و ب هـ ء متوازى أضلاع

، إذا كان : ا حـ = ٩ سم أوجد : طول س ص



(٦) فى الشكل المقابل : △ ا ب حـ فيه ا ب = ا حـ ،

ء ، هـ ، و منتصفات ا ب ، ا حـ ، ب حـ

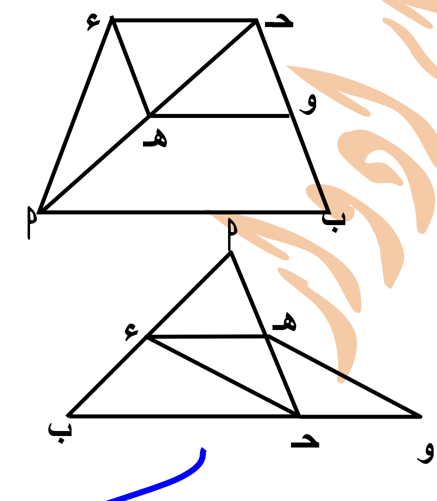
على الترتيب أثبت أن : ء هـ و ب معين

(٧) فى الشكل المقابل : △ ا ب حـ فيه ء ، هـ ، و منتصفات ا ب ،

ا حـ ب حـ على الترتيب ، هـ و = ٤.٥ سم ،

و ء = ٥.٥ سم ، ء هـ = ٣ سم

أوجد : محيط △ ا ب حـ



(٨) فى الشكل المقابل : ا ب حـ ء شبه منحرف فيه

ا ب // ء حـ ، حـ ء = $\frac{1}{2}$ ا ب ، و ، هـ منتصفى

ب حـ ا حـ على الترتيب أثبت أن :

و حـ ء هـ متوازى أضلاع

(٩) فى الشكل المقابل : △ ا ب حـ فيه

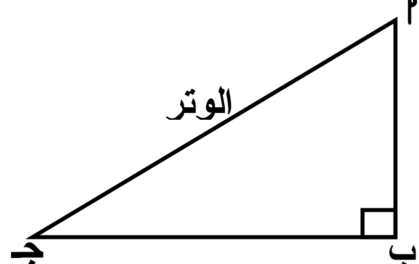
ء ، هـ منتصفى ا ب ، ا حـ على الترتيب ،

و ∋ ب حـ بحيث حـ و = $\frac{1}{2}$ ب حـ أثبت أن :

حـ و هـ ء متوازى أضلاع

نظرية فيثاغورث

فى المثلث القائم الزاوية مساحة سطح المربع المنشا على الوتر يساوى مجموع مساحتى سطحى المربعين المنشأين على الضلعين الاخرين



(أ جـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2

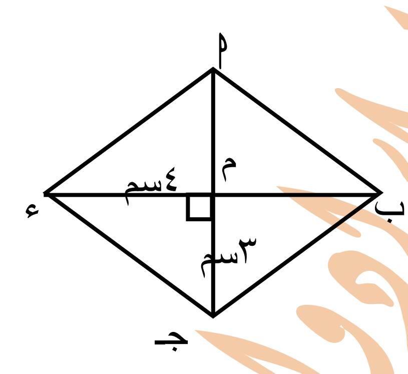
(أ ب)^2 = (أ جـ)^2 ـ (ب جـ)^2

(ب جـ)^2 = (أ جـ)^2 ـ (أ ب)^2

مثـــ١ـــال : فى كل شكل مما ياتى أوجد طول الضلع المجهول

(أ حـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب حـ)^2 = ٩ + ١٦ = = ٢٥ أ حـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم	أ ، ب ، جـ ، ٣ ، ٤
(هـ و)^2 = (ء و)^2 ـ (ء هـ)^2 = ١٠٠ ـ ٣٦ = ٦٤ هـ و = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم	ء ، هـ ، و ، ١٠ ، ٦
(ص ع)^2 = (س ع)^2 ـ (س ص)^2 = ١٦٩ ـ ٢٥ = ١٤٤ ص ع = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم	س ، ص ، ع ، ١٣ ، ٥

مثـ٢ـال : معين طولا قطريه ٦ سم ، ٨ سم أوجد محيطه



المعين قطراه متعامدان وينصف كلا منهما الاخر

فى Δ أ ب م

(أ ب)^2 = (أ م)^2 + (ب م)^2 = (٣)^2 + (٤)^2

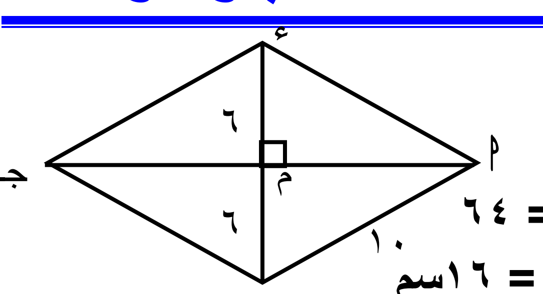
= ٩ + ١٦ = ٢٥

أ ب = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

محيط المعين = طول الضلع × ٤ = ٥ × ٤ = ٢٠ سم

مثـ٣ـال: أ ب جـ ء معين طول ضلعه = ١٠سم وطول قطره ب ء = ١٢سم أوجد مساحته

المعين قطراه متعامدان وينصف كلا منهما الاخر



∵ ب ء = ١٢سم ∴ ب م = م ء = ٦سم

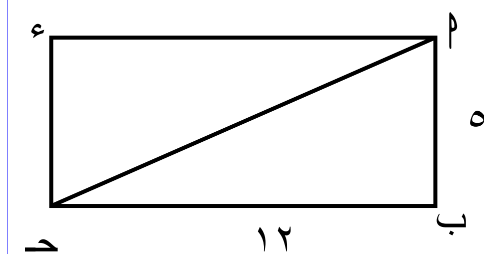
Δ ا ب م القائم الزاوية فى م

∴ $(ا م)^٢ = (ا ب)^٢ - (ب م)^٢ = ١٠٠ - ٣٦ = ٦٤$

∴ ا م = $\sqrt{٦٤}$ = ٨ سم ا جـ = ٢ × ٨ = ١٦سم

∴ مساحة المعين = $\frac{١}{٢}$ حاصل ضرب قطريه = $\frac{١}{٢}$ × ١٢ × ١٦ = ٩٦ سم^٢

مثـ٤ـال : مستطيل مساحته ٦٠ سم^٢ وطوله ١٢ سم أوجد طول قطره



مساحة سطح المستطيل = الطول × العرض = ٦٠

٦٠ = ١٢ × العرض ∴ العرض = $\frac{٦٠}{١٢}$ = ٥ سم

Δ ا ب جـ قائم الزاوية فى ب

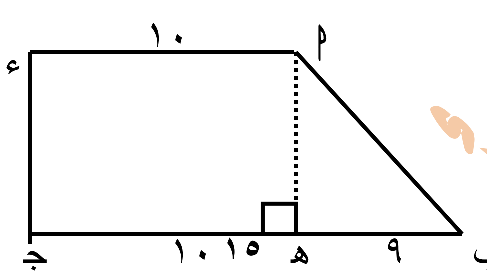
∴ $(ا جـ)^٢ = (ا ب)^٢ + (ب جـ)^٢$

$= (١٢)^٢ + (٥)^٢ = ١٤٤ + ٢٥ = ١٦٩$ ∴ ا جـ = $\sqrt{١٦٩}$ = ١٣ سم

مثـ٥ـال : ا ب جـ ء شبه منحرف فيه ا ء // $\overline{ب جـ}$ ، ق (∠ ب جـ ء) = ٩٠° فإذا كان

ا ب = ١٥ سم ، ب جـ = ١٩ سم ، ا ء = ١٠ سم أوجد مساحته

العمل : نرسم $\overline{ا هـ}$ ⊥ $\overline{ب جـ}$ يقطعه فى هـ



∴ ب هـ = ١٩ – ١٠ = ٩ سم

Δ ا ب هـ قائم الزاوية فى هـ

∴ $(ا هـ)^٢ = (ا ب)^٢ - (ب هـ)^٢$

$= (١٥)^٢ - (٩)^٢ = ٢٢٥ - ٨١ = ١٤٤$

∴ ا هـ = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ مساحة شبه المنحرف = $\frac{١}{٢}$ (ا ء + ب جـ) × ع

= $\frac{١}{٢}$ (١٠ + ١٩) × ١٢ = ١١٤ سم^٢

مثـ٦ـال : فى الشكل المقابل : ق (∠ ا) = ق (∠ ا جـ ء) = ٩٠

أوجد (أولا) طول جـ ء (ثانيا) مساحة سطح الشكل ا ب جـ ء

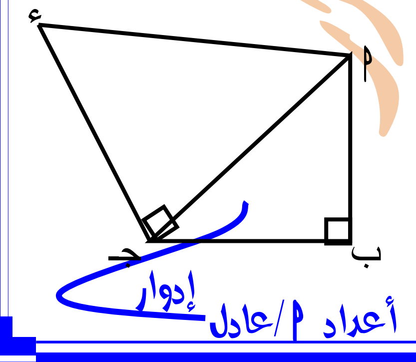
Δ ا ب جـ قائم الزاوية فى ب



∴ $(ا جـ)^٢ = (ا ب)^٢ + (ب جـ)^٢ = ١٦ + ٩ = ٢٥$

∴ ا جـ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥ سم

Δ ا جـ ء قائم الزاوية فى جـ



∴ (جـ ء)^2 = (أ ء)^2 − (أ جـ)^2 = ١٦٩ − ٢٥ = ١٤٤

∴ جـ ء = $\sqrt{١٤٤}$ = ١٢ سم

∴ مساحة سطح الشكل أ ب جـ ء = مساحة△ أ ب جـ + مساحة△ أ جـ ء

= $\frac{1}{2}$ × ٣ × ٤ + $\frac{1}{2}$ × ١٢ × ٥ = ٦ + ٣٠ = ٣٦ سم^2



مثـــال٧: فى الشكل المقابل أ ب حـ ء شكل رباعى فيه

ق (∠ب) = ٩٠°، ق (∠ء) = ٩٠°، أ ب = ١٥سم ،

ب حـ = ٢٠ سم ، جـ ء = ٧ سم، أوجد طول أ جـ ، أ ء

ثم أوجد مساحة الشكل أ ب حـ ء

فى △ أ ب حـ ∵ ق (∠ب) = ٩٠°

∴ (أحـ)^2 = (أ ب)^2 + (ب جـ)^2 = (١٥)^2 + (٢٠)^2 = ٦٢٥

∴ أ حـ = $\sqrt{٦٢٥}$ = ٢٥ سم

فى △ أ ء حـ ∵ ق (∠ء) = ٩٠°

∴ (أء)^2 = (أ جـ)^2 − (ء جـ)^2 = (٢٥)^2 + (٧)^2 = ٥٧٦

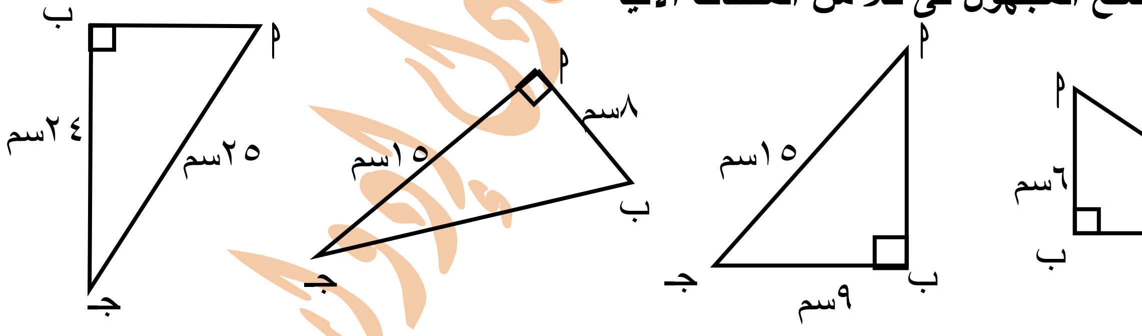
∴ جـ ء = $\sqrt{٥٧٦}$ = ٢٤ سم

مساحة الشكل أ ب حـ ء = مساحة △ أ ب حـ + مساحة △ أ ء حـ

= $\frac{1}{2}$ × ٢٠ × ١٥ + $\frac{1}{2}$ × ٢٤ × ٧ = ١٥٠ + ٨٤ = ٢٣٤ سم^2

تمارين على نظرية فيثاغورث

[١] أوجد طول الضلع المجهول فى كلا من المثلثات الاتية



[٢] أ ب جـ ء مستطيل فيه أ ب = ٩سم ، أ جـ = ١٥ سم أحسب مساحة سطحه



[٣] ﻡ ب جـ ء معين طولا قطريه = ٢٤ سم ، ١٠ سم أوجد محيطه

[٤] ﻡ ب جـ ء معين محيطه = ٤٠ سم طول أحد قطريه = ١٢ سم أوجد
طول قطره الاخر ثم أوجد مساحته

[٥] مستطيل مساحته = ٤٨ سم^{٢} طوله = ٨سم أوجد محيطه .

[٦] فى الشكل المقابل
ق (∠ ء) = ٩٠ ، ﻡ جـ = ١٣سم
ب جـ = ٤سم ، جـ ء = ٥ سم
(١) أوجد طول ﻡ ء ، ﻡ ب
(٢) أوجد مساحة Δ ﻡ ب جـ

[٧] فى الشكل المقابل
ﻡ ب جـ ء شبه منحرف فيه $\overline{ﻡ ء}$ // $\overline{ب جـ}$
أوجد مساحته

[٨] فى الشكل المقابل ﻡ ب جـ ء شكل رباعى فيه
ق(ب) = ق (∠ ء) = ٩٠ ، ﻡ ب = ٧ سم ،
ﻡ ء = ١٥سم ، جـ ء = ٢٠سم أوجد
(١) طول ﻡ جـ ، ب جـ
(٢) مساحة الشكل الرباعى ﻡ ب جـ ء

[٩] فى الشكل المقابل
س ص ع ل شكل رباعى فيه
ق (∠ص) = ق (∠س ع ل) = ٩٠ °
س ص = ٩ سم ، ص ع = ١٢سم
س ل = ٢٥ أوجد
(١) طول ع ل (٢) مساحة الشكل س ص ع ل



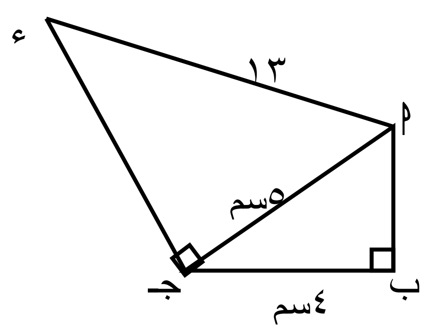
[١٠] ﻡ جـ ء مستطيل فيه ﻡ ب = ٨سم ، ﻡ جـ = ١٧ سم أوجد مساحته

[١١] ﻡ ب جـ ء شبه منحرف فيه ﻡ ء // ب جـ ، ﻡ ب = ﻡ ء = جـ ء = ١٠
، ب جـ = ٢٢سم أوجد مساحته

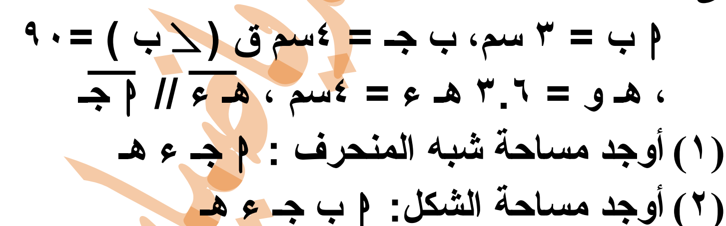


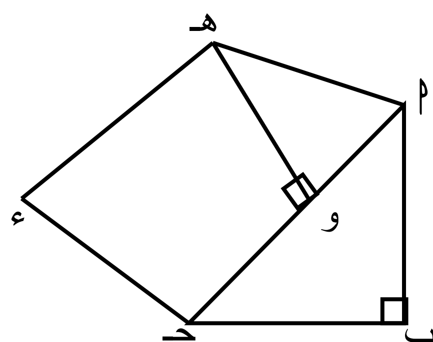
[١٢] أ ب جـ مثلث متساوى الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٣ سم ، ب جـ = ١٠سم أوجد مساحة سطحه .

[١٣] أ ب جـ ء معين طول ضلعه ٢٥ سم ، طول أحد قطريه = ٤٨ سم أوجد مساحة سطحه .

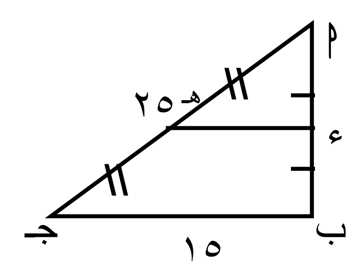


[١٤] فى الشكل المقابل
أ ب جـ ء شكل رباعى فيه
ق (∠ ب) = ق (∠ أ جـ ء) = ٩٠
أ جـ = ٥سم ، ب جـ = ٤سم
أ ء = ١٣سم أوجد مساحته .



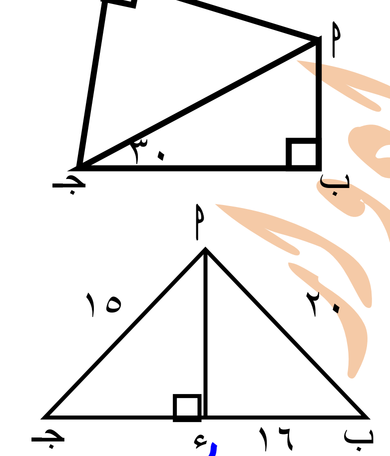


[١٥] فى الشكل المقابل
أ ب = ٣ سم، ب جـ = ٤سم ق (∠ ب) =٩٠
، هـ و = ٣.٦ هـ ء = ٤سم ، هـ ء // أ جـ
(١) أوجد مساحة شبه المنحرف : أ جـ ء هـ
(٢) أوجد مساحة الشكل: أ ب جـ ء هـ



[١٦] فى الشكل المقابل
ق (∠ أ ب جـ) = ٩٠° ، ء ، هـ منتصفا أ ب ، أ جـ على الترتيب ب جـ = ١٥سم ، أ جـ = ٢٥
أوجد مساحة شبه المنحرف: ء ب جـ هـ

[١٧] فى الشكل المقابل
ق(∠ أ ب جـ) = ق (∠ أ ء جـ) = ٩٠
أ ب = ١٠سم ، جـ ء = ١٢سم أوجد طول أ ء



[١٨] فى الشكل المقابل
أ ب جـ مثلث فيه أ ء ⊥ ب جـ
أ ب = ٢٠سم ، ب جـ = ١٦سم
أ جـ = ١٥سم أوجد طول ء جـ
ومساحة Δأ ب جـ

التحويلات الهندسية

التحويلة الهندسية :

تحول كل نقطة فى المستوى أ إلى نقطة أ/ فى نفس المستوى

التحويلات الهندسية متعددة و من أمثلتها :

** فى الشكل المقابل : نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " بوضع معكوس حول المستقيم ل تسمى هذه التحويلة " إنعكاس "

الأصل　شكل (١)　　ل　　الصورة　شكل (٢)

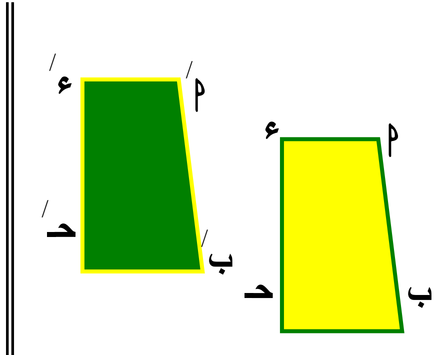
** فى الشكل المقابل: نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن إنتقل من مكانه إلى مكان آخر تسمى هذه التحويلة " إنتقال "

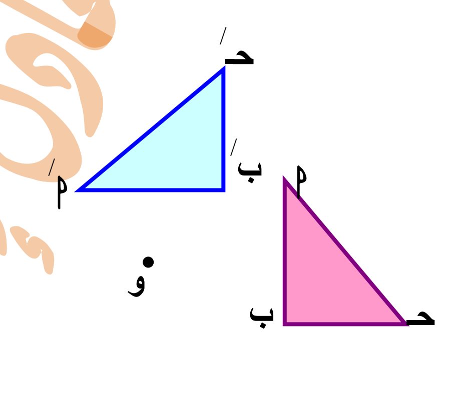
الأصل　شكل (١)　　الصورة　شكل (٢)

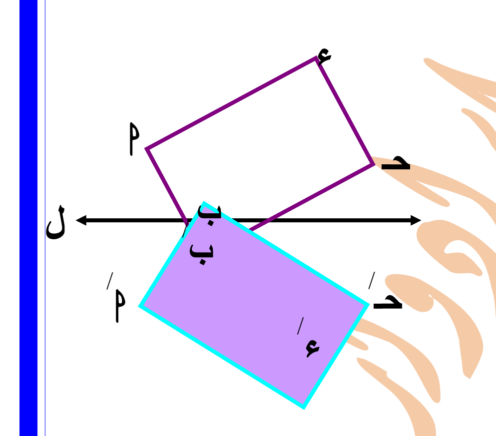
** فى الشكل المقابل: نلاحظ أن : الشكل (٢) " الصورة " هو نفس الشكل (١) " الأصل " ولكن دار حول نقطة ما تسمى هذه التحويلة " دوران "

الأصل　شكل (١)　　الصورة　شكل (٢)

مثـ١ـال: صف نوع التحويلة الهندسية " إنعكاس – إنتقال – دوران " فى كل شكل مما يأتى :







مثــ٢ـال: إرسم صورة Δ ٲ ب حـ حسب التحويلة :

(س ، ص) ← (– س ، ص)

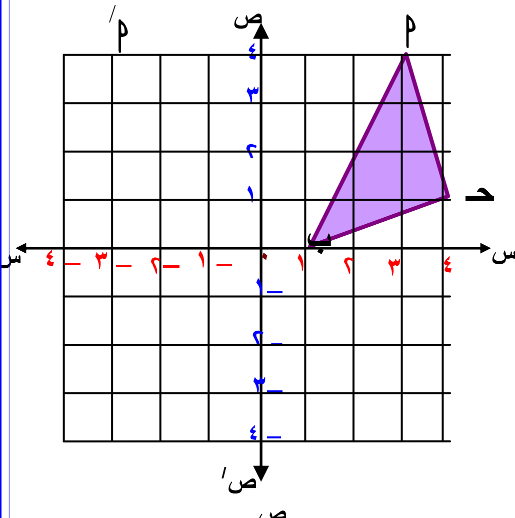
∵ (س ، ص) ← (– س ، ص)

∴ ٲ (٣ ، ٤) ← ٲ/ (– ٣ ، ٤)

، ب (١ ، ٠) ← ب/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

، حـ (٤ ، ١) ← حـ/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

صف نوع التحويلة ٠٠٠٠



مثــ٣ـال: إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :

(س ، ص) ← (س ، – ص)

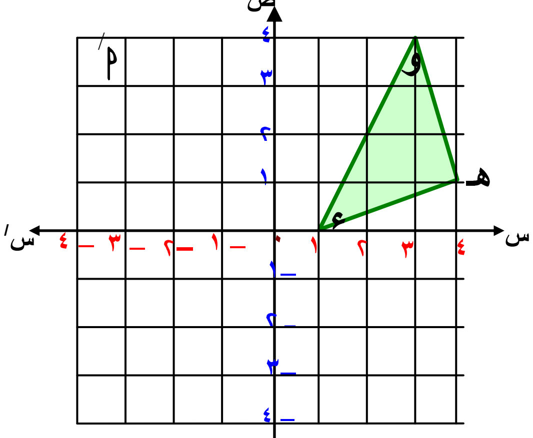
∵ (س ، ص) ← (س ، – ص)

∴ ء (١ ، ٠) ← ء/ (١ ، ٠)

، هـ (٤ ، ١) ← هـ/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

، و (٣ ، ٤) ← و/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

صف نوع التحويلة ٠٠٠٠



مثــ٤ـال: إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :

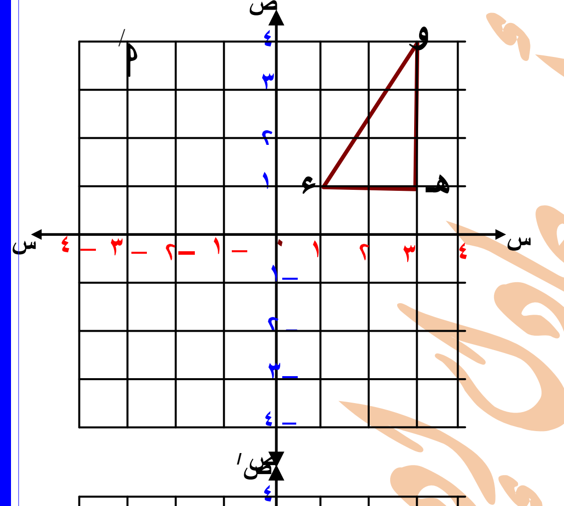
(س ، ص) ← (– ص ، س)

∵ (س ، ص) ← (– ص ، س)

∴ ء (١ ، ١) ← ء/ (– ١ ، ١)

، هـ (٣ ، ١) ← هـ/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

، و (٣ ، ٤) ← و/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)



مثــ٥ـال: إرسم صورة Δ ء هـ و حسب التحويلة :

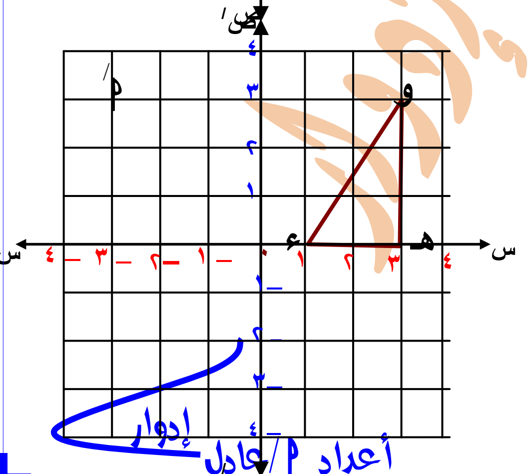
(س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ١)

∵ (س ، ص) ← (س + ١ ، ص – ١)

∴ ء (١ ، ٠) ← ء/ (٢ ، -١)

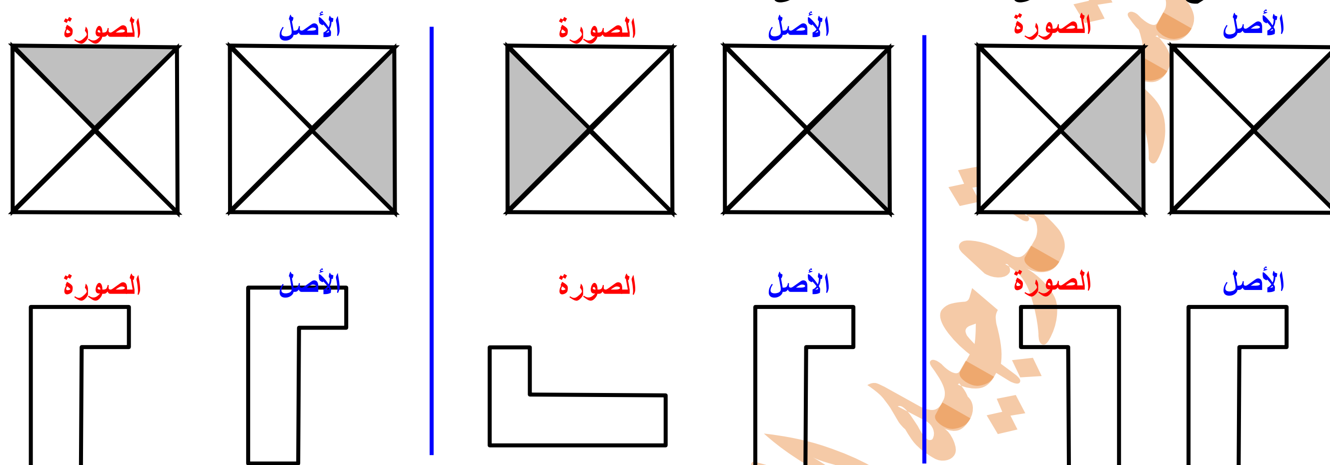
، هـ (٣ ، ٠) ← هـ/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)

، و (٣ ، ٣) ← و/ (٠٠٠٠٠ ، ٠٠٠٠٠)



تمـــــارين

(١) صف نوع التحويلة فى كل شكل مما يأتى :



(٢) فى مستوى إحداثى متعامد إرسم Δ أ ب حـ الذى فيه أ = (١ ، ٠) ، ب = (٢ ، ٣)

، حـ = (٤ ، ٢) ثم إرسم صورته فى كل من الحالات الآتية واصفاً نوع التحويلة الهندسية فى كل حالة :

أولاً : (س ، ص) ← (– س ، ص) ثانياً : (س ، ص) ← (– س ، ص)

ثالثاً : (س ، ص) ← (س ، ص – ٣) رابعاً : (س ، ص) ← (س ، – ص)

الانعكـــــاس

نعلم أن :

الإنعكاس هو تحويلة هندسية تحول الشكل الهندسى إلى شكل هندسى آخر مطابق له

** الإنعكاس فى المستقيم ل يحول كل نقطة أ إلى أَ ، ب إلى بَ بحيث : $\overline{\text{أ أَ}}$

إذا كانت أ $\notin$ ل فإن ل هو العمود الذى ينصف

إذا كانت ب $\in$ ل فإن ب ≡ بَ

أى إذا كانت ب $\in$ ل فإن صورة ب هى نفسها

الإنعكاس فى المستوى الإحداثى :

(١) إذا كانت أ = (س ، ص) فإن صورتها بالإنعكاس فى محور السينات هى :

أَ = (س ، – ص)

(٢) إذا كانت أ = (س ، ص) فإن صورتها بالإنعكاس فى محور الصادات هى :

أَ = (– س ، ص)

فمثلا - صورة النقطة (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور السينات هى (٢ ، -٣)
- صورة النقطة (٢ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات هى (-٢ ، ٣)

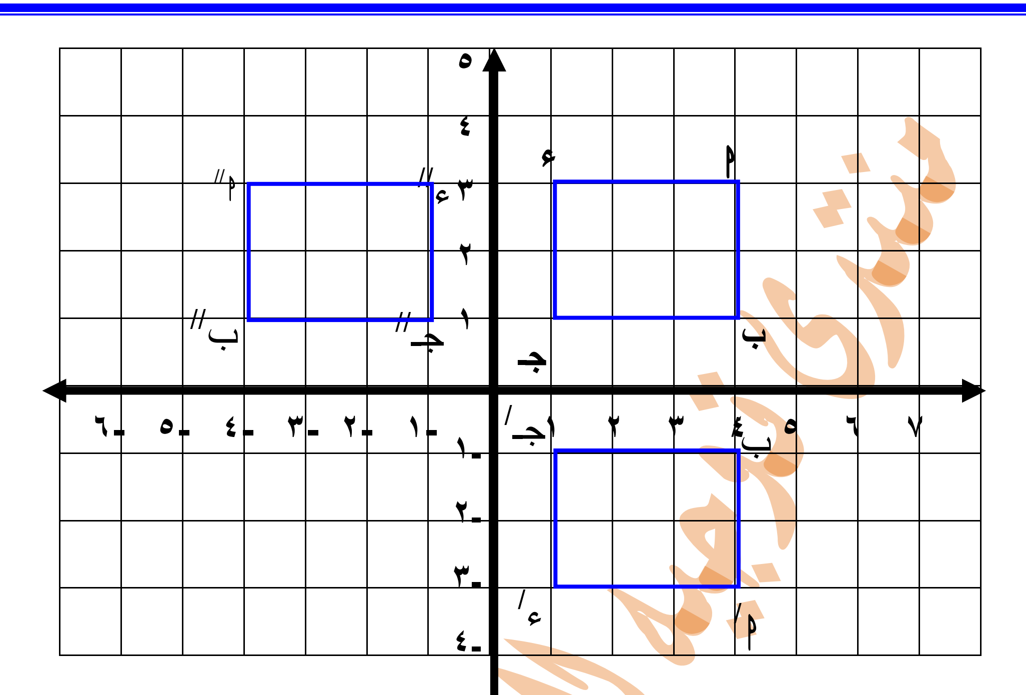
مثـال ١ : فى مستوى إحداثى متعامد إرسم المستطيل ٢ ب حـ ء حيث
٢ = (٤ ، ٣) ، ب = (٤ ، ١) ، حـ = (١ ، ٣) ، ء = (١ ، ١) ثم أوجد :
(١) صورة المستطيل ٢ ب حـ ء بالإنعكاس فى محور السينات
(٢) صورة المستطيل ٢ ب حـ ء بالإنعكاس فى محور الصادات
(٣) قس طول ضلع من أضلاع المستطيل " قياس كل زاوية " وصورته بالإنعكاس وقارن بينهما و أذكر ماذا تلاحظ ؟
(٤) هل ٢َ بَ // ءَ حـَ ، بَ حـَ // ٢َ ءَ ، هل ٢ً بً // ءً حـً ، بً حـً // ٢ً ءً
وأذكر ماذا تلاحظ ؟

الحــــــــل

(١) بالإنعكاس فى محور السينات :
صورة ٢ = (٤ ، ٣) هى ٢َ = (٤ ، ـ ٣)
صورة ب = (٤ ، ١) هى بَ = (٤ ، ـ ١)
صورة حـ = (١ ، ٣) هى حـَ = (١ ، ـ ٣)
صورة ء = (١ ، ١) هى ءَ = (١ ، ـ ١)
∴ صورة المستطيل ٢ ب حـ ء بالإنعكاس فى محور السينات هى المستطيل ٢َ بَ حـَ ءَ

(٢) بالإنعكاس فى محور الصادات :
صورة ٢ = (٤ ، ٣) هى ٢ً = (ـ ٤ ، ٣)
صورة ب = (٤ ، ١) هى بً = (ـ ٤ ، ١)
صورة حـ = (١ ، ٣) هى حـً = (ـ ١ ، ٣)
صورة ء = (١ ، ١) هى ءً = (ـ ١ ، ١)
∴ صورة المستطيل ٢ ب حـ ء بالإنعكاس فى محور الصادات هى المستطيل ٢ً بً حـً ءً

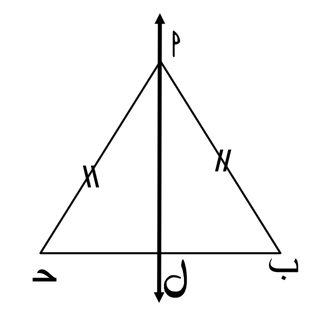
(٣) بالقياس نجد أن : ٢ ب = ٢َ بَ = ٢ً بً ، ب حـ = بَ حـَ = بً حـً
، ٢ ء = ٢َ ءَ = ٢ً ءً ، حـ ء = حـَ ءَ = حـً ءً
، ق (∠ ٢) = ق (∠ ٢َ) ، ق (∠ ب) = ق (∠ بَ)
، ق (∠ حـ) = ق (∠ حـَ) ، ق (∠ ء) = ق (∠ ءَ)



نلاحظ أن : (١) الإنعكاس يحافظ على أطوال القطع المستقيمة
(٢) الإنعكاس يحافظ على قياسات الزوايا
(٣) الإنعكاس يحافظ على التوازى



خواص الإنعكاس فى المستوى :



(١) الإنعكاس يحافظ على أطوال القطع المستقيمة
(٢) الإنعكاس يحافظ على قياسات الزوايا
(٣) الإنعكاس يحافظ على التوازى
(٤) الإنعكاس يحافظ على البينية

ملاحظة :

الإنعكاس الذى يحول الشكل إلى نفسه بالإنعكاس فى مستقيم ل يسمى تماثل ، ويسمى المستقيم ل فى هذه الحالة محور تماثل

الإنعكاس فى نقطة



الإنعكاس فى نقطة م يحول كل نقطة ا فى المستوى إلى نقطة ا/ فى نفس المستوى بحيث تكون م منتصف $\overline{ا ا/}$
وتسمى النقطة م مركز الإنعكاس ، وتكون صورة م بالإنعكاس فى م هى نفسها
لذا فإن : الإنعكاس فى نقطة هو تساوى قياسى

مثــ٢ــال : فى الشكل المقابل أوجد صورة ٲ ب بالإنعكاس فى نقطة م

الحـــــــــل

(١) نرسم ٲم ونعين عليه ٲ/ بحيث ٲ/ م = ٲ م

(٢) نرسم ب م ونعين عليه ب/ بحيث ب/ م = ب م

(٣) نرسم ٲ/ ب/ فتكون ٲ/ ب/ صورة ٲ ب بالإنعكاس فى نقطة م

** إذا كانت حـ ∋ ٲ ب أوجد صورة حـ بالإنعكاس فى نقطة م ماذا تلاحظ ؟

** أذكر إسم الشكل ٲ ب ٲ/ ب/

خواص الإنعكاس فى نقطة :

(١) الإنعكاس فى نقطة يحافظ على أطوال القطع المستقيمة والبعد بين النقط

(٢) الإنعكاس فى نقطة يحافظ على قياسات الزوايا

(٣) الإنعكاس فى نقطة يحافظ على التوازى

(٤) الإنعكاس فى نقطة يحافظ على الإتجاه الدورانى لترتيب رؤوس الشكل

تعريف : متوازى الأضلاع هو شكل رباعى فيه كل ضلعين متقابلين متوازيين

خواص متوازى الأضلاع : (١) كل ضلعين متقابلين متساويان فى الطول

(٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان فى القياس

(٣) القطران ينصف كل منهما الآخر

ملاحظة : المعين والمستطيل والمربع هى حالات خاصة من متوازى الأضلاع

أذكر خواص كل من : المعين والمستطيل والمربع

الانعكاس فى نقطة الاصل :-

صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس فى نقطة الاصل هى (- س ، - ص)

فمثلاً صورة النقطة (٣ ، ٤) بالانعكاس فى نقطة الاصل هى (-٣ ، -٤)

ملاحظة هامة :- إذا كانت أ تقع على المستقيم ل فإن صورتها بالانعكاس فى ل هى نفسها أ

فمثلا النقطة (س ، ٠) تقع على محور السينات فتكون صورتها بالانعكاس فى محور السينات هى نفسها

فمثلا صورة النقطة (٣ ، ٠) بالانعكاس فى محور السينات هى (٣ ، ٠)

- النقطة (٠ ، ص) تقع على محور الصادات ولهذا فإن صورتها بالانعكاس فى محور الصادات هى نفسها

فمثلا صورة النقطة (٠ ، ٣) بالانعكاس فى محور الصادات هى (٠ ، ٣)

مثـــال : م ب جـ مثلث فيه م = (٥ ، ٤) ، ب = (٣ ، ١) ، جـ = (١ ، ١)

أوجد(١) صورة ∆ م ب جـ بالانعكاس فى محور السينات

(٢) صورة ∆ م ب جـ بالانعكاس فى محور الصادات

(٣) صورة ∆ م ب جـ بالانعكاس فى نقطة الاصل

الحـــــــــــل

(١) صورة : ∆ م ب جـ بالانعكاس فى محور السينات

صورة م بالانعكاس فى محور السينات هى م / = (٥ ، -٤)

صورة ب بالانعكاس فى محور السينات هى ب/ = (٣ ، -١)

صورة جـ بالانعكاس فى محور السينات هى جـ / = (١ ، -١)

فيكون م / ب/ جـ/ هى صورة م ب جـ بالانعكاس فى محور السينات

(٢) صورة: ∆ م ب جـ بالانعكاس فى محور الصادات

صورة م بالانعكاس فى محور الصادات هى م // = (-٥، ٤)

صورة ب بالانعكاس فى محور الصادات هى ب/ = (-٣ ، ١)

صورة جـ بالانعكاس فى محور الصادات هى جـ // = (-١ ، ١)

فيكون م // ب// جـ// هى صورة م ب جـ بالانعكاس فى محور الصادات

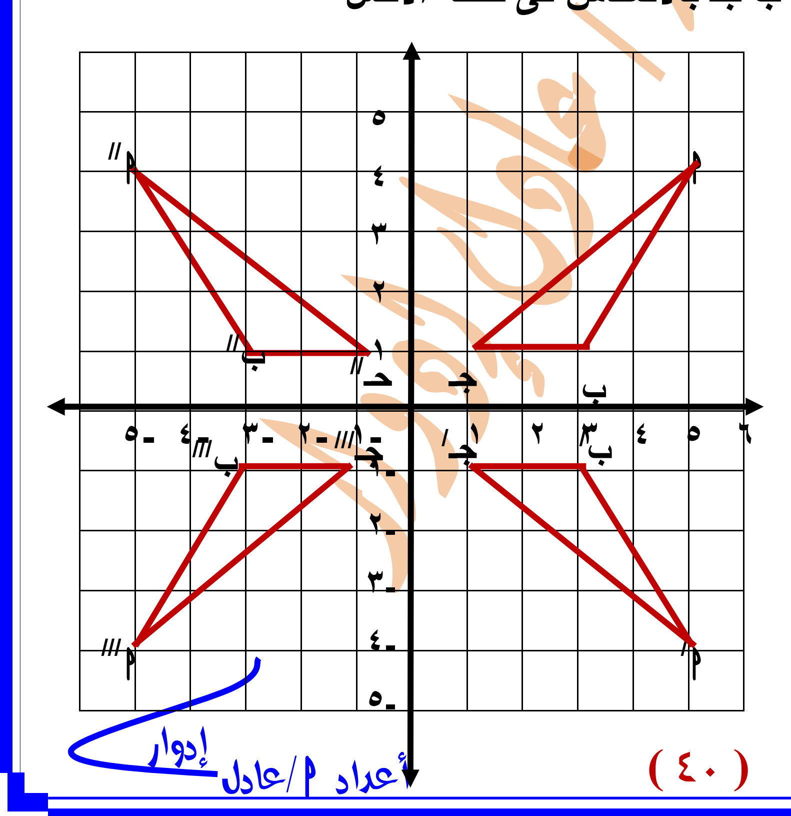
(٣) صورة : ∆ م ب جـ بالانعكاس فى نقطة الاصل

صورة م بالانعكاس فى نقطة الاصل هى م /// = (-٥ ، -٤)

صورة ب بالانعكاس فى نقطة الاصل هى ب/// = (-٣ ، -١)

صورة جـ بالانعكاس فى نقطة الاصل هى جـ /// = (-١ ، -١)

فيكون م /// ب/// جـ/// هو صورة ∆ أ ب جـ بالانعكاس فى نقطة الاصل



أنظر الرسم البيانى المجمع

مثـ٢ـال : إذا كانت أ = (٣ ، ٥) ، ب = (٥ ، ٢) ، جـ = (٠ ، ٢) أوجد

(١) صورة : Δ أ ب جـ بالانعكاس فى محور السينات

(٢) صورة : Δ أب جـ بالانعكاس فى محور الصادات

(٣) صورة : Δ أب جـ بالانعكاس فى نقطة الاصل

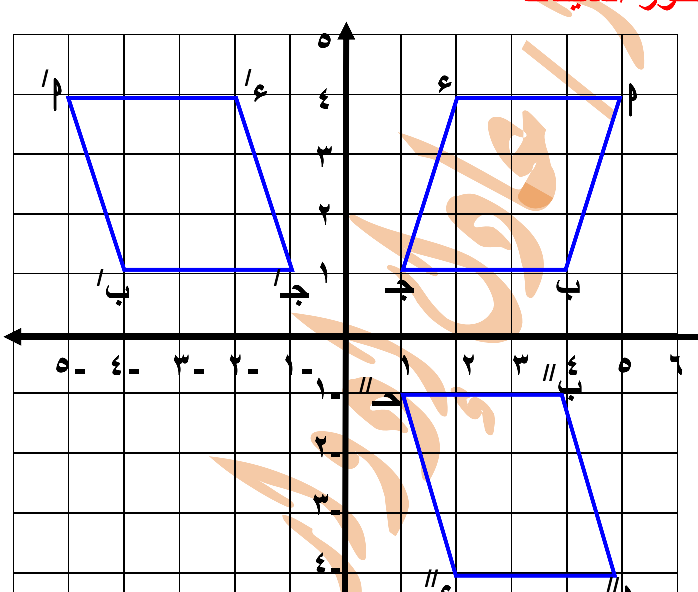


(١) Δ أ/ ب/ جـ/ صورة Δ أ ب جـ
بالانعكاس فى محور السينات
أ/ = (٣ ، ـ٥) ، ب/ = (٥، ـ٢) ، جـ/ = (٠، ـ٢)

(٢) Δ أ// ب// جـ// صورة Δ أ ب جـ
بالانعكاس فى محور الصادات
أ// = (ـ٣ ، ٥) ، ب// = (ـ٥، ٢) ، جـ// = (٠، ٢)

(٣) Δ أ/// ب/// جـ/// صورة Δ أ ب جـ
بالانعكاس فى نقطة الاصل
أ/// = (ـ٣ ، ـ٥) ، ب/// = (ـ٥، ـ٢) ، جـ/// = (٠، ـ٢)

مثـ٣ـال : مثل على شبكة تربيعية متوازى الاضلاع أ ب جـ ء حيث
أ = (٥ ، ٤) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (١ ، ١) ، ء = (٢ ، ٤)
ثم أوجد (١) صورته بالانعكاس فى محور الصادات
(٢) صورته بالانعكاس فى محور السينات



(١) ▱ أ/ ب/ جـ/ ء/ صورة ▱ أ ب جـ ء
بالانعكاس فى محور الصادات
أ/ = (ـ٥ ، ٤) ، ب/ = (ـ٤، ١) ،
جـ/ = (ـ١، ١) ، ء/ = (ـ٢ ، ٤)

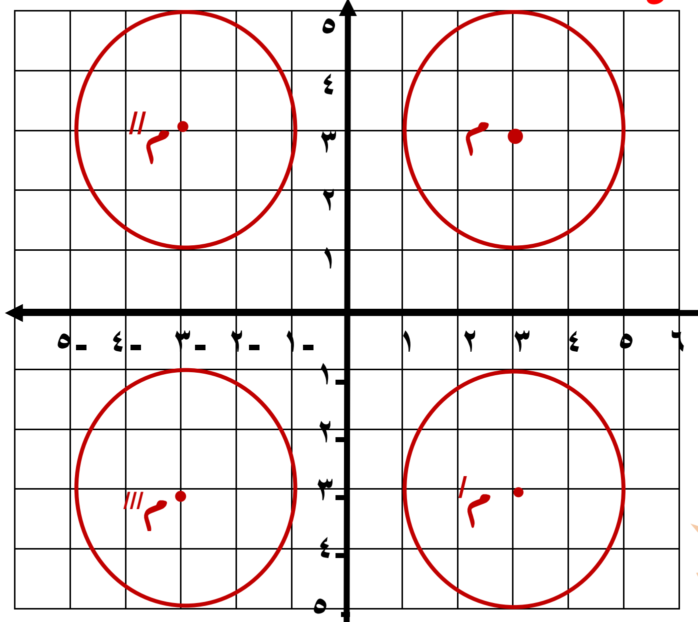
(٢) ▱ أ// ب// جـ// ء// صورة ▱ أ ب جـ ء
بالانعكاس فى محور السينات
أ// = (٥ ، ـ٤) ، ب// = (٤ ، ـ١) ،
جـ// = (١، ـ١) ، ء// = (٢ ، ـ٤)

مثـ٤ـال : إذا كانت م = (٣ ، ٢) هى مركز دائرة طول نصف قطرها ٢ وحدة طول

(١) صورة : الدائرة م بالانعكاس فى محور السينات

(٢) صورة : الدائرة م بالانعكاس فى محور الصادات

(٣) صورة : الدائرة م بالانعكاس فى نقطة الاصل



(١) الدائرة م/ صورة الدائرة م
بالانعكاس فى محور السينات
م/ = (٣ ، -٢)

(٢) الدائرة م// صورة الدائرة م
بالانعكاس فى محور الصادات
م// = (-٣ ، ٢)

(١) الدائرة م/// صورة الدائرة م
بالانعكاس فى نقطة الاصل
م/// = (-٣ ، -٢)

تدريب أكمل الجدول الآتى :-

النقطة	بالانعكاس فى محور السينات	بالانعكاس فى محور الصادات	بالانعكاس فى نقطة الاصل
(٣ ، ٤)			
	(٥ ، ٧)		
		(٤ ، ٢)	
			(٦ ، ٣)
(-٤ ، ١)			
	(-٣ ، ٧)		
		(-٢ ، ٩)	
			(-٤ ، ٦)
(٢ ، -٥)			
	(٣ ، -٥)		
		(٥ ، -٨)	
			(٤ ، -٨)
(-٦ ، -٩)			
	(-٧ ، -٥)		

الإنتقـــال

نعلم أن :

* الإنتقال هو تحويل هندسى يحول (يزيح) كل نقطة ﻡ فى المستوى إلى نقطة ﻡ/ فى نفس المستوى مسافة ثابتة فى إتجاه معين

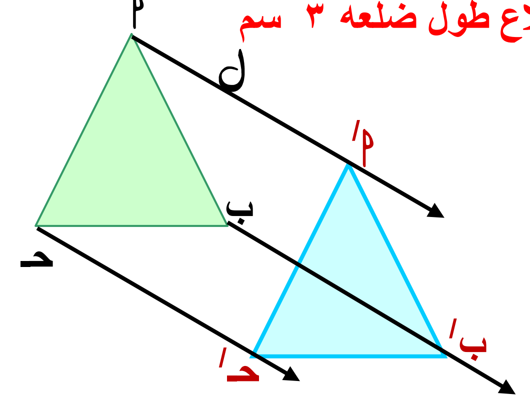
* لتحديد الإنتقال يلزم معرفة : (١) إتجاه الإنتقال (٢) مسافة الإنتقال

الإنتقال فى المستوى الإحداثى :

يحول كل نقطة ﻡ إلى نقطة ﻡ/ بإزاحة سينية هـ يتبعها إزاحة صادية ء بحيث :

ﻡ (س ، ص) ← ﻡ/ (س + هـ ، ص + ء)

مثـ١ـال : فى الشكل المقابل Δ ﻡ ب حـ مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم أوجد صورته بإنتقال ٥ سم فى إتجاه ل مسافة ٥ سم



الحـــــل

نرسم من ﻡ ، ب ، حـ أشعة توازى ل ـم وفى نفس إتجاهه

ونعين عليها النقط ﻡ/ ، ب/ ، حـ/ على الترتيب

بحيث ﻡ ﻡ/ = ب ب/ = حـ حـ/ = ٥ سم

فيكون Δ ﻡ/ب/حـ/ هو صورة Δ ﻡ ب حـ

تحت تأثير الإنتقال المطلوب ماذا تلاحظ ؟

خواص الإنتقال فى المستوى :

(١) الإنتقال يحافظ على أطوال القطع المستقيمة و البعد بين النقط

(٢) الإنتقال يحافظ على قياسات الزوايا

(٣) الإنتقال يحافظ على التوازى

كما أن : الإنتقال يحافظ على الترتيب الدوارنى لرؤوس الشكل الهندسى

مثـ٢ـال : أوجد صورة كلا من النقط الاتية بأنتقال (ـ٢ ، ٣)

(١) ﻡ = (٣ ، ـ١) (٢) ب = (٤ ، ٢) (٣) جـ = (ـ١ ، ١)

الحـــــل

صوة النقطة ﻡ = (٣ ، ـ١) + (ـ٢ ، ٣) = (١ ، ٢)

صوة النقطة ب = (٤ ، ٢) + (ـ٢ ، ٣) = (٢ ، ٥)

صوة النقطة جـ = (ـ١ ، ١) + (ـ٢ ، ٣) = (ـ٣ ، ٤)

مثـ٣ـال : بأستخدام الأنتقال الذى يحول النقطة (س ، ص) إلى (س+١، ص ـ ٢) أوجد
(١) صورة النقطة (٣ ، ٤) (٢) النقطة التى صورتها (٣ ، ٤)

الحـــــــــل

الأنتقال = (١ ، ـ ٢)

الصورة = النقطة + الأنتقال = (٣ ، ٤) + (١ ، ٢-) = (٤ ، ٢)

النقطة = الصورة ــ الأنتقال = (٣ ، ٤) ــ (١ ، ٢-) = (٢ ، ٦)

مثـ٤ـال : إذا كانت ٢ = (ـ ١ ، ٢) ، ب = (٣ ، ٥) أوجد صورة النقطة (٢ ، ٥) بالانتقال الذى مقدار أ ب وفى أتجاه أ ب

الحـــــــــل

الانتقال = ب ــ ٢ = (٣ ، ٥) ــ (ــ١ ، ٢) = (٤ ، ٣)

صورة النقطة (٢ ، ٥) = (٢ ، ٥) + (٤ ، ٣) = (٦ ، ٨)

مثـ٥ـال: فى مستوى إحداثى متعامد إرسم المربع ٢ ب حـ ء حيث ٢ = (٢ ، ٥) ، ب = (٥ ، ٣) ، حـ = (١ ، ١) ثم أوجد : صورة المربع ٢ ب حـ ء بالإنتقال (س ، ص) ← (س ــ ٣ ، ص ــ ٥) ماذا تلاحظ

صورة ٢ هى ٢/ بالإنتقال (ــ٣ ، ــ٥)

٢/ = (٢ ــ ٣ ، ٥ ــ ٥) = (ــ١ ، ٠)

صورة ب هى ب/ بالإنتقال (ــ٣ ، ــ٥)

ب/ = (٥ ــ ٣ ، ٣ ــ ٥) = (٢، ــ٢)

صورة جـ هى جـ/ بالإنتقال (ــ٣ ، ــ٥)

جـ/ = (١ ــ ٣ ، ١ ــ ٥) = (ــ٢،ــ٤)

تدريب :

النقطة	الانتقال	الصورة
(٢ ، ٣)	(٣ ، ٥)	....
....	(٢ ، ٤)	(١- ، ٣)
(٣ ، ٥)	....	(٢ ، ٣)
(٢ ، ٤)	(٠ ، ٥)	....
....	(٢ ، ١)	(١- ، ٤-)

الدوران

نعلم أن :

* الدوران فى المستوى هو تحويلة هندسية تدور الشكل حول نقطة بزاوية معينة
* الدوران حول النقطة م بزاوية قياسها هـ يحول كل نقطة ٩ فى المستوى
إلى نقطة ٩/ فى نفس المستوى بحيث :

(١) ق (∠٩ م ٩/) = هـ (٢) م ٩/ = م ٩

و يرمز له بالرمز د (م ، هـ) حيث :

(١) م مركز الدوران (٢) هـ قياس زاوية الدوران (٣) إتجاه الدوران

ملاحظات :

(١) الدوران يتحدد تماماً عند تحديد مركز الدوران ، قياس زاويته ، إتجاه الدوران
(٢) قياس زاوية الدوران يكون موجباً إذا كان الدوران ضد إتجاه عقارب الساعة
، ويكون سالباً إذا كان الدوران مع إتجاه عقارب الساعة

صورةالنقطة (س ، ص)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٩٠° ← (– ص ، س)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ١٨٠° ← (– س ، – ص)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٣٦٠° ← (س ، ص)
- بالدوران حول نقطة الاصل بزاوية قياسها ٢٧٠° ← (ص ،– س)

الدوران بزاوية قياسها (– ٩٠°) يكافئ دوران بزاوية ٢٧٠°
الدوران بزاوية قياسها (– ١٨٠°) يكافئ دوران بزاوية قياسها ١٨٠°
الدوران بزاوية قياسها (– ٢٧٠°) يكافئ دوران بزاوية قياسها ٩٠°
الدوران بزاوية ١٨٠° يسمى دوران نصف دورة
الدوران بزاوية ٣٦٠° يسمى دوران دورة كاملة ويسمى أيضاً الدوران المحايد

مثـ١ـال : أوجد صورة أ ب بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠°

** نرسم الشعاع م أ ونركز بمركز المنقلة على م بحيث يشير م أ إلى الرقم صفر فى المنقلة ثم نرسم م جـ بحيث :

ق (∠ أ م جـ) = ٦٠°

** نركز بسن الفرجار عند م وبفتحة طولها م أ نرسم قوساً يقطع م جـ فى نقطة ولتكن أ/ فتكون أ/ هى صورة أ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠°

** بالمثل نتبع نفس الخطوات لإيجاد ب/ صورة ب

** نرسم أ/ ب/ فتكون هى صورة أ ب بالدوران المطلوب   ماذا تلاحظ ؟

خواص الدوران فى المستوى :

(١) الدوران يحافظ على أطوال القطع المستقيمة

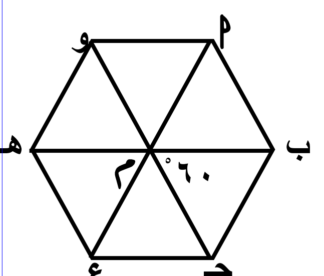
(٢) الدوران يحافظ على قياسات الزوايا

(٣) الدوران يحافظ على التوازى

(٤) الدوران يحافظ على البينية

كما أن : الدوران يحافظ على الترتيب الدوارنى لرؤوس الشكل الهندسى

مثـ٢ـال : أ ب حـ ء هـ و سداسى منتظم مركزه م أكمل ما يأتى :

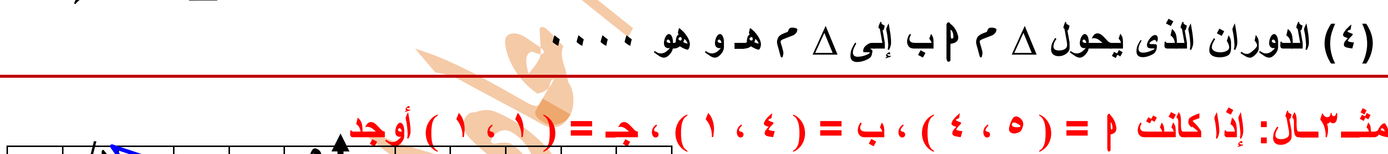


(١) صورة Δ ب م حـ بالدوران حول م بزاوية قياسها ٦٠° هى .....

(٢) صورة Δ م حـ ء بالدوران حول م بزاوية قياسها ١٢٠° هى .....

(٣) Δ م هـ ء صورة Δ ..... بالدوران حول م بزاوية قياسها – ١٢٠°

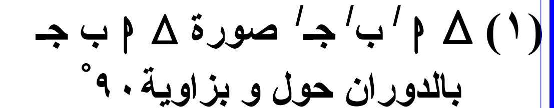
(٤) الدوران الذى يحول Δ م أ ب إلى Δ م هـ و هو .....



مثـ٣ـال: إذا كانت أ = (٥ ، ٤) ، ب = (٤ ، ١) ، جـ = (١ ، ١) أوجد

(١) صورة Δ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠°

(٢) صورة Δ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠°



(١) Δ أ/ ب/ جـ/ صورة Δ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠°

أ/ = (–٤، ٥) ، ب/ = (–١، ٤) ، جـ/ = (–١، ١)

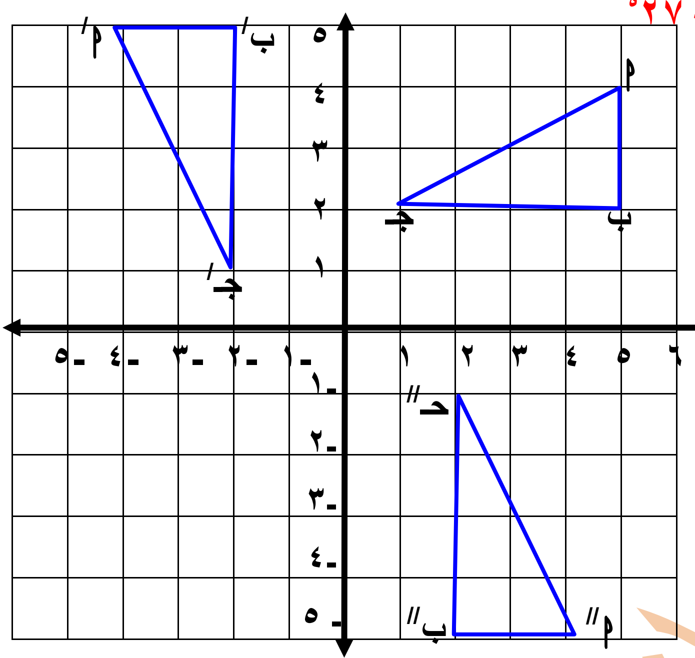
(٢) Δ أ// ب// جـ// صورة Δ أ ب جـ بالدوران حول و بزاوية ١٨٠°

أ// = (–٥،–٤) ، ب// = (–٤،–١) ، جـ// = (–١،–١)

مثـ٤ـال: إذا كانت م = (٥ ، ٤) ، ب = (٥ ، ٢) ، جـ = (١ ، ٢) أوجد

(١) صورة Δ م ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠°

(٢) صورة Δ م ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠°



(١) Δ م/ ب/ جـ/ صورة Δ م ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٩٠°

م/ = (ـ٤ ، ٥) ، ب/ = (ـ٢ ، ٥) ، جـ/ = (ـ٢ ، ١)

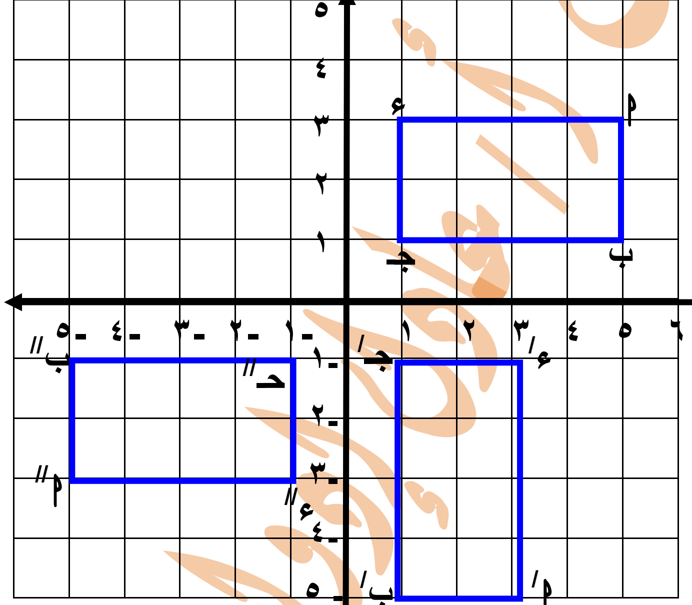
(٢) Δ م// ب// جـ// صورة Δ م ب جـ بالدوران حول و بزاوية ٢٧٠°

م// = (٤ ، ـ٥) ، ب// = (٢ ، ـ٥) ، جـ// = (٢ ، ـ١)

مثـ٥ـال: إذا كانت م = (٥ ، ٣) ، ب = (٥ ، ١) ، جـ = (١ ، ١) ، ء = (١ ، ٣) أوجد

(١) صورة ▭ م ب جـ ء بالدوران حول و بزاوية ـ ٩٠°

(٢) صورة ▭ م ب جـ ء بالدوران حول و بزاوية ١٨٠°



(١) ▭ م/ ب/ جـ/ ء/ صورة ▭ م ب جـ ء بالدوران حول و بزاوية ٩٠°

م/ = (٣ ، ـ ٥) ، ب/ = (١ ، ـ ٥) ، جـ/ = (١ ، ـ١) ، ء/ = (٣ ، ـ١)

(٢) ▭ م// ب// جـ// ء// صورة ▭ م ب جـ ء بالدوران حول و بزاوية ١٨٠°

م// = (ـ٥ ، ـ٣) ، ب// = (ـ٥ ، ـ١) ، جـ// = (ـ١ ، ـ١) ، ء// = (ـ١ ، ـ٣)

تدريب (١) : فى الشكل المقابل أكمل :

(١) صورة Δ م س ص بالانتقال م س
وفى أتجاه م س هو ....
(٢) صورة Δ م س ص بالانتقال م ص
وفى أتجاه م ص هو ....
(٣) صورة Δ س ب ع بالانتقال ب ع وفى أتجاه ب ع هو Δ..........
(٤) صورة Δ ص ع جـ بالانتقال جـ ع وفى أتجاه جـ ع هو Δ..........
(٥) صورة Δ س ب ع بالانتقال ب س وفى أتجاه ب س هو Δ..........
(٦) صورة Δ ص ع جـ بالانتقال جـ ص وفى أتجاه جـ ص هو Δ..........
(٧) صورة Δ م س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها ٦٠° هو Δ..........
(٨) صورة Δ م س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها ١٢٠° هو Δ.........
(٩) صورة Δ م س ص بالدوران حول ص بزاوية قياسها -٦٠° هو Δ............
(١٠) صورة Δ م س ص بالدوران حول س بزاوية قياسها - ١٢٠° هو Δ ....
(١١) صورة Δ س ب ع بالدوران حول س بزاوية قياسها ٦٠° هو Δ..............
(١٢) صورة Δ س ب ع بالدوران حول س بزاوية قياسها ١٢٠° هو Δ ....
(١٣) صورة Δ ص ع جـ بالدوران حول ص بزاوية قياسها -٦٠° هو Δ..............
(١٤) صورة Δ ص ع جـ بالدوران حول س بزاوية قياسها - ١٢٠° هو Δ............

م
ص س
جـ ع ب

تدريب

النقطة	بالدوران ٩٠	بالدوران ١٨٠	بالدوران ٢٧٠	بالدوران ٣٦٠
(٢ ، ٣)	....	....	....	....
....	(٣ ، ٤)	....	....	....
....	....	(٥ ، ٢)	....	....
....	....	....	(٤ ، ٦)	....
....	....	....	....	(٥ ، ٧)
(-٢ ، ٥)	....	....	....	....
....	(-٣ ، ٤)	....	....	....
....	....	(-١ ، ٣)	....	....
....	....	....	(-٥ ، ٢)	....
....	....	....	....	(-٤ ، ٢)
(٢ ، -٤)	....	....	....	....
....	(٣ ، -٢)	....	....	....

تمارين على التحويلات الهندسية

(١) إرسم Δ أ ب حـ المتساوى الأضلاع حيث طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى أ ب ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٢) فى نظام إحداثى متعامد إرسم Δ و ب حـ حيث و نقطة الأصل، ب =(٣ ، ٠)، حـ =(٣ ، ٤) ثم إرسم صورته بالإنعكاس فى محور السينات ، وأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٣) إذا كانت أ ∌ لمستقيم ل ، ب ∋ للمستقيم ل ، وكانت أ/ صورة أ بالإنعكاس فى المستقيم ل ، وكان أ ب = ٢ س وحدة طول ، أ/ ب = س + ٣ وحدة طول أوجد طول أ ب

(٤) إذا كانت النقطة ب صورة النقطة حـ بالإنعكاس فى محور السينات ، وكانت حـ صورة هـ بالإنعكاس فى محور الصادات حيث هـ = (٢ ، ٣) أوجد إحداثى النقطة ب

(٥) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع أ ب حـ ء حيث أ = (١ ، ١) ، ب = (٤ ، ٢) ، حـ = (٣ ، ٥) ، ء = (٠ ، ٤) ثم أوجد صورته بالإنتقال :
(س ، ص)⟵(س – ١ ، ص + ١) ، بالإنتقال أ ب فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ مبيناً قاعدة هذا الإنتقال

(٦) إرسم المربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٣ وحدة طول ثم إرسم صورته بالإنتقال أ ب فى إتجاه أ حـ ، وإذا وصلت كل نقطة بصورتها فأذكر ما إسم الشكل الناتج ؟

(٧) إرسم أ ب ثم عين ب/ صورة ب بدوران حول أ بزاوية قياسها ٦٠° ، و إذا كان : أ ب = (٣ س – ١٠) سم ، أ/ ب = (س + ٢) سم فأوجد طول $\overline{\text{أ ب}}$

(٨) إرسم دائرة طول نصف قطرها ٣ سم ثم إرسم صورتها بالإنعكاس فى المستقيم ل الذى يبعد عن مركزها ٥ سم

(٩) أ ب حـ ء معين فيه أ = (٢ ، – ٢) ، ب = (– ١ ، – ١) ، ء = (١ ، ١) عين من الرسم إحداثى نقطة حـ ثم أوجد صورة المعين بالإنعكاس فى محور السينات

(١٠) بإستخدام الشبكة التربيعية المتعامدة أوجد صورة الشكل أ ب حـ ء بالإنتقال :
(س ، ص)⟵(س + ٣، ص + ١) حيث أ = (ـ ١ ، ٢) ، ب = (ـ ١ ، ـ ٣) ، حـ = (ـ٣ ، ـ ٣) ، ء = (ـ ٣ ، ٢) ، وإذا وصلت كل نقطة بصورتها أذكر إسم الشكل الناتج

(١١) إرسم المربع أ ب حـ ء طول ضلعه ٤ سم ثم أوجد صورته :
بالإنتقال أ حـ فى إتجاه $\overleftarrow{\text{أ حـ}}$ ، وكذا صورته بالإنتقال مسافة ٦ سم فى إتجاه $\overleftarrow{\text{ب حـ}}$

(١٢) على شبكة التربيعية المتعامدة إرسم Δ أ ب حـ حيث أ = (١ ، ٢) ، ب = (٤ ، ١) ، حـ = (٣ ، ٤) ثم إرسم صورته بالدوران حول نقطة الأصل :
** بزاوية قياسها ٩٠°　　** بزاوية قياسها ١٨٠°

(١٣) إرسم ∆ ٢ ب حـ المتساوى الأضلاع حيث طول ضلعه ٣ سم ثم أوجد صورته :
** بالدوران حول ٢ بزاوية قياسها ١٨٠ ْ ** بالدوران حول ب بزاوية قياسها ٦٠ ْ
(١٤) ٢ ب حـ ء مستطيل ، هـ ∋ ٢ ء ، أوجد صورة ∆ ٢ ب هـ مسافة ٢ ء فى إتجاه ٢ ء ، وإذا كانت النقطة هـ/ صورة النقطة هـ بهذا الإنتقال فبرهن أن الشكل ب حـ هـ/ هـ متوازى أضلاع
(١٥) إرسم ∆ ٢ ب حـ فيه ٢ = (٦ ، ٤) ، ب = (٣ ، ٤) ، حـ = (٦ ، ٧) ثم أوجد ب/ صورة ب بالإنعكاس فى ٢ حـ ، حـ/ صورة حـ بالإنعكاس فى نقطة ٢ ، برهن أن الشكل حـ/ ب حـ ب/ مربع ، عين الإنتقال الذى يحول حـ/ب/ إلى حـ ب
(١٦) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ٢ ب حـ ء حيث ٢ = (٠ ، ٢) ، ب = (– ٥ ، ٠) ، حـ = (– ٣ ، – ٥) ، ء = (٢ ، – ٣) أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات ثم أوجد طول ضلعه ، مساحته
(١٧) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المربع ٢ ب حـ ء حيث ٢ = (٢ ، ٣) ، ب = (٢ ، – ١) ثم أوجد صورته بالإنعكاس فى محور الصادات متبوعاً بإنعكاس فى محور السينات ماذا تلاحظ ؟
(١٨) فى نظام إحداثى متعامد إرسم المستطيل ٢ ب حـ ء حيث ٢ = (٢ ، ٢) ، ب = (– ٣ ، ٢) ، عرضه يساوى ٣ وحدات طول بالإنعكاس فى محور السينات كم حالة يمكن رسمها ؟
(١٩) إذا كانت حـ (– ٣ ، – ١) هى صورة ب بالإنعكاس فى محور الصادات ، ٢ هى صورة ب بالإنعكاس فى محور السينات فأوجد الإنتقال الذى يجعل ٢ صورة حـ

